

Kozmológiai modellek vizsgálata numerikus szimulációkkal

Doktori értekezés

Rácz Gábor

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Fizika Doktori Iskola, Részecskefizika és csillagászat program

Gubicza Jenő

Egyetemi tanár, DSc

A doktori iskola vezetője

Katz Sándor

Egyetemi tanár, DSc

Programvezető

Témavezető:

Dr. Dobos László

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Konzulensek:

Dr. Csabai István

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Dr. Szapudi István

University of Hawaii, Institute for Astronomy



Budapest, 2020

Kivonat

Jelenleg a kozmológia standard modellje a Λ CDM modell, mely hideg sötét anyagot és sötét energiát tartalmaz. A modern kozmológia egyik alapvető kérdése az ezt a modellt jellemző paraméterek meghatározása. A kialakuló sötétanyag-struktúrák statisztikai tulajdonságai függenek ezektől a paraméterektől, így szimulált univerzumok és csillagászati megfigyelések összehasonlításával a kozmológiai paraméterek meghatározhatók. Egy táguló univerzumban, a sötét anyag struktúráinak nem lineáris fejlődését N-test szimulációkkal modellezhetjük. Ilyen szimulációkat a XX. század utolsó negyedétől kezdve futtatnak a kozmológusok. A jelentős fejlődés az informatikában lehetővé tette, hogy mára már több ezermilliárd részecskével modellezhetjük a sötét anyag viselkedését a különböző kozmológiai modellekben. Ezek a szimulációk egy véges, periodikus térfogatban történnek, mivel az Univerzum végtelen térfogatát homogén felbontással nem lehet leszimulálni. Ilyen jellegű periodicitást a csillagászati megfigyelések nem tudtak kimutatni, így ezt a határfeltételt a valóság közelítésének tekintjük. Dolgozatomban a hagyományos szimulációs algoritmustoktól több szempontból is eltérő módszereket vizsgáltam.

A dolgozat első részében áttekintem a modern kozmológia történetét és alapjait, különös tekintettel a hagyományos, periodikus kozmológiai szimulációknál használt eljárásokra, és az ezekhez tartozó kezdeti feltételek előállítására. Ezek ismertetése azért lényeges, mivel az itt bemutatott módszerekre épülnek az általam leírt új algoritmusok.

A dolgozat második részében leírom a sötét anyag fejlődésének modellezésére kidolgozott új szimulációs algoritmusomat, és meghatározom, hogy speciálisan ehhez hogyan kell előállítani a kezdeti feltételeket. A módszer neve StePS (Stereographically Projected Simulations – Sztereografikusan Projektált Szimulációk), és lényege, hogy a végtelen térfogatú univerzumot egy véges, kompakt térfogatra képezzük le a inverz sztereografikus projekcióval izotróp módon, majd ebben a kompakt térben számítjuk a sötét anyag struktúráinak fejlődését. Ezekben a szimulációkban anyageloszlás a valódi térben nem állandó felbontású: a felbontás sugárirányban csökken, így az új algoritmus tekinthető egy új "zoom-in" szimulációs módszernek. A StePS módszer segítségével néhány millió részecskével közel ugyanakkora dinamikai tartomány vizsgálható, mint egy több milliárd részecskét tartalmazó hagyományos szimuláció esetén. Ennek

a résznek a második felében bemutatom a C++ nyelven írt StePS implementációm, és azt, hogy hogyan párhuzamosítottam a programot. Mivel néhány millió részecskével igen nagy dinamikai tartomány vizsgálható, ezért a program memóriaigénye igen kicsi. Ez lehetőséget teremt arra, hogy igen nagy hatásokkal párhuzamosítva futtassuk a programot egyszerre akár nagy számú grafikus processzoron. Bemutatom a programmal futtatott első szimulációkat, és összehasonlítom a szimulációs eredményeket az ismert nagy periodikus szimulációk eredményeivel. Ennek a résznek a végén megmutatom, hogy hogyan lehet StePS szimulációk segítségével a nagyskálás felmérésekből illesztett kozmológiai paraméterek hibáit megbecsülni, elsősorban a Hubble-állandó meghatározására irányuló megfigyelésekre fókuszálva.

Az utolsó része a dolgozatnak a kozmológiai visszahatásról szól. Ennek lényege, hogy az Univerzumban kialakuló struktúrák visszahatnak a tágulás dinamikájára. Az általános relativitás elmélet keretein belül ez egy létező effektus, de a mai napig nincsen megegyezés a kozmológusok között ennek a hatásnak a nagyságáról. Az alternatív kozmológiai modellek egy csoportja a megfigyelt gyorsuló tágulását az Univerzumnak a nagyskálás szerkezet visszahatására vezeti vissza. Itt leírom a saját közelítésem a kozmológiai visszahatásra, mely a periodikus szimulációk módosításával képes modellezi az általános relativitáselmélet keretein belül ismert effektust néhány egyszerű feltételezéssel. Megmutatom, hogy ez a modell valóban képes gyorsuló tágulást mutatni, és illeszkedni bizonyos megfigyelésekhez.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Dobos Lászlónak az elmúlt öt évben nyújtott segítségét, támogatását és kritikáit. Az ő alapossága és elhivatottsága nélkülözhetetlen volt a dolgozat és a közös publikációk megírásában.

Köszönettel tartozom korábbi témavezetőmnek és konzulensemnek, Csabai Istvánnak, aki már az alapképzésen elindított a kozmológia és a numerikus módszerek felé, és pótolhatatlan segítséget nyújtott kutatásaim során.

Szeretném megköszönni Szapudi Istvánnak a hosszú, 11 időzónán átnyúló konzultációkat, és az egy hónap közös munkát a Hawaii Egyetemen. Az ő nagyszerű meglátásai, segítsége és ötletei nélkül ez a dolgozat nem születhetett volna meg.

Köszönöm Szalay A. Sándornak a támogatását, és az általa nyújtott lehetőséget, hogy a baltimore-i Johns Hopkins Egyetemen is dolgozhattam ezen az értekezésen.

Köszönöm szüleimnek és nagyszüleimnek a hosszú éveken át nyújtott támogatásukat, és a belém vetett hitüket.

Végül szeretném megköszönni a feleségemnek, Klaudiának, a sok türelmet, megértést, és hogy mindig legjobb tudása szerint támogatott.

Ezt a munkát az NKFIH OTKA NN 129148, NKFIH OTKA NN 114560 és az NKFIH Nemzeti Kvantumtechnológiai Program támogatta. Köszönet a Wigner Fizikai Kutatóközpont GPU laborjának a számítási erőforrások biztosításáért.

This work has been supported by National Science Foundation (NSF) award 1616974 and the National Aeronautics and Space Administration (NASA) grants NNX12AF83G and NNX10AD53G. Part of this research project was conducted using the computational resources at the Maryland Advanced Research Computing Center (MARCC).

Tartalomjegyzék

1. A standard kozmológiai modell történeti előzményei	7
2. A standard kozmológiai modell	15
2.1. A homogén és izotróp univerzumot leíró egyenletek	15
2.2. A Friedmann-egyenletek megoldásai	18
2.3. Kozmológiai távolságok	20
2.4. A Λ CDM modell	22
2.4.1. Az Ia típusú szupernóvák	23
2.4.2. A sötét anyag	24
2.4.3. A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás	24
2.4.4. A Hubble-állandó	26
2.4.5. Az Univerzum tágulási története	27
3. Kozmológiai struktúrafejlődés statisztikus leírása	29
3.1. Kozmológiai N-test szimulációk	32
3.2. Kezdeti feltételek	34
3.3. Szimulációk kiértékelése	37
3.3.1. A korrelációs függvény és a teljesítményspektrum	37
3.3.2. A gömbi C_l teljesítményspektrum	38
3.3.3. Haló-eloszlásfüggvények	40
3.4. Vöröseltolódás-kúpok előállítása	42
3.5. Periodikus szimulációk anizotrópiájának vizsgálata	42
4. Kozmológiai szimulációk kompaktifikált geometriában	47
4.1. A sztereografikus projekció	47
4.1.1. Egydimenziós eset	47

4.1.2.	Két- és háromdimenziós eset	49
4.2.	A mozgásegyenletek	49
4.2.1.	Együttmozgó koordinátákban	51
4.2.2.	Nem együttmozgó koordinátákban	53
4.3.	Vöröseltolódás-kúpok előállítása	55
4.4.	Kezdeti feltételek generálása	56
4.4.1.	Kompaktifikációs módszer	56
4.4.2.	Háromdimenziós gömbi üvegek módszer	59
5.	A StePS szimulációk masszív párhuzamosítása GPU klaszterre	67
5.1.	Mozgásegyenletek integrálása	67
5.1.1.	A program vázlatos működése	69
5.2.	Az erők számítása	69
5.3.	Teljesítményelemzés	71
6.	A lefuttatott StePS szimulációk	79
6.1.	Az első StePS szimulációk	79
6.1.1.	A periodikus és a StePS szimulációk összevetése	81
6.2.	A Millennium-szimuláció megismétlése	85
7.	A Hubble-állandó vizsgálata StePS szimulációkkal	89
7.1.	Lefuttatott szimulációk	89
7.2.	Lokális struktúrák hatása a Hubble-állandó mérésére	90
8.	A nagyskálás szerkezet visszahatása a tágulásra	95
8.1.	A önállóuniverzum-sejtésen alapuló inhomogén tágulási modell	97
8.2.	Lefuttatott visszahatás szimulációk	101
8.3.	A Hubble-állandó meghatározása az AvERA modellben	103
9.	Összefoglalás	107
A	A StePS szimulációs program használata	123
A.1.	A program telepítése és futtatása	123
A.2.	Bemeneti paraméterek	125
A.3.	Ki- és bemeneti formátumok	125

1. fejezet

A standard kozmológiai modell történeti előzményei

A modern fizikai kozmológia története 1915-ben kezdődik, Albert Einstein ebben az évben fejezte be az általános relativitáselmélet kidolgozását [18]. A ma ismert elméletek közül ez írja le a legpontosabban a gravitációs kölcsönhatást. Az ekkor általánosan elfogadott világgép a fizikusok és csillagászok között az volt, hogy az Univerzum végtelen korú, és statikus. Viszonylag hamar kiderült, hogy ennek a feltételnek nem tud eleget tenni az új gravitációs elmélet, így Einstein 1917-ben kiegészítette egy új taggal a gravitációt leíró egyenleteit: a Λ kozmológiai állandóval [19]. Ennek a tagnak kis távolságokban elhanyagolható volt a hatása, így a modell jóslatai továbbra is egyeztek a megfigyelésekkel. Nagy távolságokban ez a hozzáadott tag viszont egy taszító hatásként jelentkezik, így egy homogén Univerzumban, egy megfelelően megválasztott Λ ellensúlyozhatja a gravitációs vonzást, és így lehetségessé váltak a statikus megoldások.

1922-ben az orosz Alexander Friedmann elsőként megtalálta az Einstein egyenletek egzakt megoldásait homogén univerzumra [26], majd tőle függetlenül, öt évvel később a francia Georges Lemaître is megtalálta ugyanezeket a megoldásokat [43]. A táguló univerzum ekkor még csupán egy érdekes matematikai megoldása volt az új gravitációs elméletnek, ám a következő évek felfedezései gyorsan megváltoztatták az Univerzumból alkotott képünket.

1920-ban, Washingtonban, a Smithsonian természettudományi múzeumban rendezték meg a híres Shapely-Curtis vitát. A "Nagy vitaként" is hivatkozott esemény azt volt hivatott eldönteni, hogy a csillagászok által megfigyelt spirális ködök részei a Tejútnak, vagy különálló sziget

univerzumok. Harlow Shapely a kaliforniai Mount Wilson obszervatóriumból az mellett érvelt, hogy a Tejút galaxis részei, mivel Adriaan van Maanen, a kor neves csillagásza meghatározta a M101-es spirális köd (Szélkerék-köd) forgási sebességét. A kapott forgási periódus 10^5 évnek adódott [80], így ha ennek az objektumnak a fizikai mérete összemérhető a Tejúttal, akkor a külső régiókra a forgási sebességnek nagyobbnak kellene lennie mint a fénysebesség. Másik fontos érve az volt, hogy az Androméda-ködben megfigyelt nógák fényessége összemérhető a teljes köd fényességével, így ha az Androméda-köd különálló galaxis, akkor ezekhez a fel-fénylésekhez lehetetlen nagyságú energiára lenne szükség. Herber Curtis úgy gondolta, hogy ezek a ködök Tejúttól független, ahhoz hasonló galaxisok. Felhívta rá a figyelmet, hogy az Androméda-ködben több nógát figyeltek meg, mint a Tejútban összesen. Így ha valóban része ez az objektum a Tejútnak akkor mi magyarázza azt, hogy a Tejút egy kis részében ennyivel több nógá keletkezik? Curtis azt is megmutatta, hogy a spirális ködök spektruma igen hasonlít a csillaghalmazok spektrumára, és elismerte, hogy ha van Maanen megfigyelése valóban helyes, akkor ezek a ködök nem lehetnek szigetuniverzumok [73]. A vitát végérvényesen Edwin Hubble döntötte el 1924-ben, mikor cefeida változócsillagok segítségével meghatározta az égen látható több ilyen köd távolságát a Mount Wilson obszervatóriumból. Eredményeit a New York Times-ban írta le még ebben az évben, de a tudományos publikációval 1929-ig várt. A mért távolságok egyértelművé tették, hogy az Androméda és a hasonló ködök nem részei a Tejútnak, hanem extragalaktikus objektumok. A későbbi mérések cáfolták van Maanen megfigyeléseit.

Friedmann az Univerzum dinamikájára az általános relativitáselmélet keretében adott megoldásai akkor lettek igazán fontosak, mikor Hubble 1929-ben publikálta megfigyeléseit a közeli galaxisok távolságáról, és a mért radiális távolodási sebességükről [36]. A galaxisok látóirányú sebességét a mért spektrumaik Doppler-eltolódásából határozta meg, és lineáris kapcsolatot talált a távolodásuk sebessége és az adott galaxis távolsága között. Ezt nevezzük ma Hubble-törvénynek. Ez a megfigyelés meggyőzte Einsteint arról, hogy hiba volt az egyenleteibe beletenni a kozmológiai állandót, hiszen az Univerzum valóban tágul, úgy, ahogy az egyenletei eredeti állapotukban megjósolták. 1931-ben Einstein meglátogatta Edwin Hubble-t, hogy személyesen is beszélgethessenek erről a fontos felfedezésről [23]. Ez a megfigyelés lett az első bizonyítéka a később *Ősrobbanás-elméletnek* nevezett modellnek, ami leírja az Univerzum fejlődését.

1933-ban Fritz Zwicky, a híres svájci csillagász sikeresen megbecsülte a Coma-galaxishalmaz dinamikai tömegét, a benne lévő galaxisok sebességéből. A mért tömeg több-

szöröse volt a galaxisokban található látható anyagból becsült tömegnek. Ez volt az első olyan megfigyelés, ami valószínűsítette, hogy a galaxist alkotó világító anyag mellett létezik egy nem látható, sötét komponens is [94]. A kor kozmológusai nemigen foglalkoztak ezzel a megfigyeléssel, csak jóval később, az 1970-es években Vera Rubin fedezte fel újra a sötét anyagot a galaxisok belső dinamikáját vizsgálva [68].

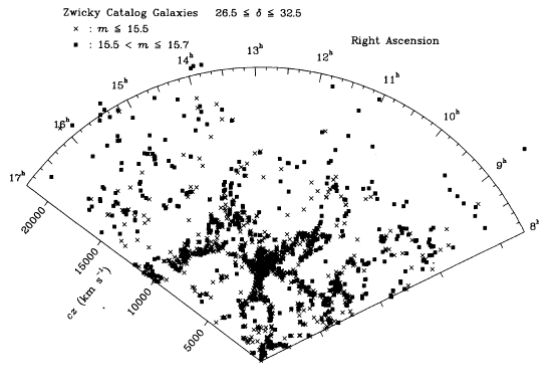
A következő fontos felismerés a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás létének megsejtése, majd felfedezése volt. A doktorandusz hallgató Ralph Alpher és Robert Herman 1948-ban elsőként megjósolták, hogy az Univerzum mai hőmérséklete hozzávetőlegesen $5K$ [3]. Az ehhez a hőmérséklethez tartozó termikus sugárzás az elektromágneses spektrum mikrohullámú tartományába esik. Arno Penzias és Robert Wilson 1964-ben felfedeztek egy izotróp, termikus mikrohullámú háttérsugárzást. Méréseik alapján ennek hőmérséklete $3,5 \pm 1,0K$ volt, ami hibahatáron belül egyezik a ma elfogadott $2,7K$ értékkel. Kezdetben nem ismerték fel felfedezésük jelentőségét, és műszeres hibára gyanakodtak. Ezzel egy időben Jim Peebles, Robert Dicke és David Wilkinson éppen készültek ennek a sugárzásnak a kimérésére. Bernard Burke, Arno Penzias barátja látta Peebles előzetes eredményeit, és értesítette Penziaszt és Wilsont a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás lehetséges detektálásáról. Ezután ismerték fel, hogy valóban mit is találtak, és Peebles-el együttműködve publikálták az eredményeiket [52]. Ezért a felfedezésükért Arno Penziaszt és Robert Wilsont 1978-ban, majd Jim Peeblest 2019-ben Nobel-díjjal jutalmazták. Ezt a megfigyelést tekintik az Ősrobbanás-elmélet második bizonyítékának.

A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás előrejelzése után csupán 10 hónappal, 1948 decemberében Ralph Alpher témavezetőjével, George Gamow-val és barátjával, Hans Bethe-vel közösen publikálták a híres $\alpha - \beta - \gamma$ cikket [2]. Ebben lefektették az elméleti alapjait a primordiális nukleoszintézisnek, azaz annak az elméletnek, ami leírja a kémiai elemek keletkezését a korai Univerzumban. Az elmélet sikeresen megmagyarázza a Hidrogén és Hélium mért relatív gyakoriságát, így ez a harmadik bizonyíték az Ősrobbanás-elmélet mellett.

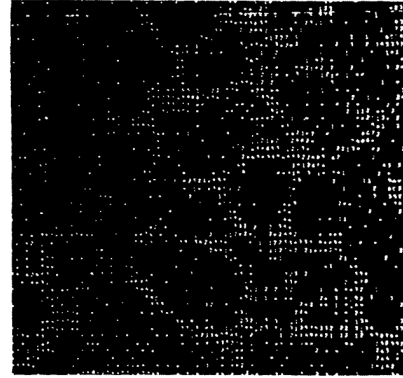
Az új kozmológiai modellt egy Brit csillagász, Sir Fred Hoyle nevezte először "Nagy Bumm" (*Big Bang*) elméletnek 1949-ben, egy BBC rádióműsorban. Hoyle 2001-ben bekövetkezett haláláig nem fogadta el ezt az elméletet, és saját "steady-state" modelljével próbálta megmagyarázni a megfigyeléseket. A magyarul gyakran textitŐsrobbanáselméletnek nevezett modell lényege, hogy az Univerzum egy korai, igen sűrű és forró korai állapotból kiindulva folyamatosan tágul. A modell az előző bekezdésekben leírt megfigyelésekkel összhangban van,

és számos egyéb csillagászati megfigyelést is sikeresen megmagyaráz.

Ebben a korban már széles körben alkalmazták a Friedmann-egyenletek megoldásait a távolság leírására, de ezeknek az egyenletek felhasználásához fel kell tételezni a metrika, és így az anyageloszlás izotrópiáját és homogenitását. Miután az ősrobbanás-elmélet széles körben elfogadottá vált a kozmológusok és csillagászok körében, felmerült a kérdés: Hol kezdődik, és létezik-e a homogenitás skálája? Nyilvánvaló volt, hogy galaktikus méreteknél kisebb skálákon nem beszélhetünk homogenitásról, így logikus lépésnek adódott a galaxisok térbeli eloszlásának vizsgálata. Egy galaxis pozícióját az éggömbön viszonylag könnyű meghatározni, viszont a távolsága nehezebb feladatnak bizonyult. A Hubble által használt cefeidamódszer igen időigényes, és csak a legközelebbi galaxisokra alkalmazható. A Hubble-törvény felhasználásával, a vöröseltolódás megméréseivel viszont lehetséges a távolságok megbecslése. Mivel a távoli galaxisok igen halványak, ezért több óráig kell megfigyelni őket, hogy kiértékelhető spektrumot kapjanak a csillagászok. A szűkös távcsőidők és a hosszú szükséges megfigyelési idők miatt az 1970-es évek végére sikerült elkészíteni a lokális Univerzum első galaxistérképeit. Az első ilyen térképet a Coma-galaxishalmazról és környezetéről Stephen A. Gregory és Laird A. Thompson publikálták [32]. Ebben a munkában meghatározták 238 galaxis vöröseltolódását, és azonosítottak nagy régiókat, ahol szinte nincsenek galaxisok. A későbbiekben ezeket a térrészeket üregeknek nevezték el. Ezután nyilvánvalóvá vált, hogy a galaxisok eloszlása 50 – 100Mpc-es skálákon még inhomogén. A következő fontos térképet a Margaret Geller és munkatársai által készített CfA vöröseltolódás-felmérés szolgáltatta. Ez 1977-ben kezdődött, és hat évvel később publikálták az első eredményeiket [37]. Ebben már lényegesen nagyobb térfogatot vizsgáltak, mint egy klaszter és környezete, és megerősítették a korábbi megfigyeléseket: nagy, galaxisokban szegény üregek, és galaxisok által sűrűn benépesített szálak és klaszterek alkotják az Univerzum nagyskálás szerkezetét. Ezeken a felméréseken egyértelműen látszódtak pár száz Mpc skáláig az alapvető struktúrák, viszont nem tették egyértelművé, hogy mekkora méretek felett tekinthető már homogénnek az anyageloszlás. Ezzel a céllal a magyar Szalay Sándor és munkatársai mindkét galaxispólus irányába 1Gpc távolságig meghatározták a galaxisok eloszlását két, 1 négyzetfok nagyságú égterületen [78]. Ebben az egy dimenziós felmérésben egyértelművé vált, hogy ezeken a skálákon is vannak struktúrák, és galaxisok számsűrűsége periodikus ingadozásokat mutatott. A 2000-es évekre a technológiai fejlődés lehetővé tette, hogy egyszerre több ezer galaxis spektrumát meghatározzuk, és így lehetővé vált a több millió galaxist tartal-



(a) Az első CfA-szelet [79]



(b) Numerikus szimuláció [92]

1.1. ábra. Az első megfigyelések és szimulációk az Univerzum nagyskalás szerkezetéről. Mindkét ábrán jól kivehetők a kozmikus üregek, szálak, és klaszterek.

mazó három dimenziós térképek készítése az Univerzumból. Az első két ilyen nagy felmérés a 2dF Galaxy Redshift Survey (2dFGRS) [11] a Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [91] volt, és azóta számos, még pontosabb és nagyobb felmérés készült és készül.

A galaxistérképeken látható struktúrák az ősrobbanás pillanata után kialakult kis sűrűség-fluktuációkból nőttek fel a gravitáció hatására. Hamar egyértelművé vált, hogy ezeknek a struktúráknak a kialakulása csak korlátozottan vizsgálható analitikus módszerekkel, pontos eredményekhez numerikus szimulációkra van szükség [59]. A nagyskalás szerkezet megfigyelése előtt már hasonló struktúrákat vártak az asztrofizikusok: 1978-ban Ja. B. Zeldovics N-test módszerrel futtatott kétdimenziós szimulációkat, és hasonló részecskeeloszlásokat kapott, mint amit a későbbi mérések mutattak [92]. Az első CfA szelet, és Zeldovics szimulációi az 1.1 ábrán láthatók.

Ahogy idővel egyre nagyobb és részletesebb égfelmérések készültek, úgy volt egyre inkább szükség gyors numerikus eljárásokra, hogy össze lehessen ezeket hasonlítani a kozmológiai modellek által jósolt struktúrákkal. Az első szimulációs programok csupán néhány ezer részecskével tudtak számításokat végezni [59], ám ez néhány évtized alatt megváltozott a P^3M [17], és a későbbi Barnes-Hut [4] algoritmusok, továbbá a modern számítógépeknek köszönhetően, az 1990-es évek végére már több száz millió részecskével volt lehetséges kozmológiai szimulációkat futtatni.

Az első modellek feltételezték hogy a sötét anyag neutrínókból vagy azokhoz igen hasonló,

véges nyugalmi tömeggel rendelkező részecskékből áll. Az ilyen részecskék még az Univerzum igen korai időszakában lecsatolódnak, így ultrarelativisztikus sebességszperzióval rendelkeznek. Ezt a sötét anyag modelljét forró sötét anyagnak (Hot Dark Matter - HDM) nevezzük. Természetesen beállítható egy adott modellben kisebb sebességszperzió is így beszélhetünk meleg sötét anyagról (WDM), ahol lényegesen lassabban mozognak a részecskék, továbbá hideg sötét anyagról (CDM), ahol már a sebességszperzió teljesen elhanyagolható [6], és a sebességtér csak a kezdeti sűrűségfluktuációkból alakul ki a gravitáció hatására. A kozmológiai N-test szimulációk megmutatták, hogy a megfigyelésekkel megegyező struktúrákat a hideg, sötét anyaggal rendelkező kozmológiák tudnak mutatni.

1998-ban egy új megfigyelés megváltoztatta a képünket tágulásról: két független csoport, – a Supernova Cosmology Project (SCP) és a High-z Supernova Search (HXS) – az Ia típusú szupernóvákat megfigyelve felfedezte az Univerzum gyorsuló tágulását [65; 53]. Ezt a megfigyelést úgy lehetett a legegyszerűbben megmagyarázni, hogy az Einstein által 1917-ben bevezetett, majd 1929-ben elvetett kozmológiai állandó mégsem zérus. A Λ bevezetésével így eljutottunk a ma is leginkább elfogadott kozmológiai modellhez, a Λ CDM modellhez, mely kozmológiai állandót és hideg, sötét anyagot tartalmaz a barionikus anyagon és a sugárzáson kívül. Ez lett a kozmológia standard modellje, ami a kozmológiai megfigyelések széles spektrumát megmagyarázza. Adam Riess, Saul Perlmutter és Brian Schmid Nobel-díjat kaptak 2011-ben felfedezésükért.

A tágulás dinamikája természetesen befolyásolja a struktúrák fejlődését, így a gyorsuló tágulás felfedezése után felmerült az igény arra, hogy az új kozmológiai modellben kialakuló struktúrák a lehetséges legnagyobb felbontás mellett legyenek tanulmányozhatók. 2005-ben a kor egyik leggyorsabb szuperszámítógépén lefuttatták a Millennium-szimulációt, ami 10^{10} részecske segítségével vizsgálta a struktúrák fejlődését a standard kozmológiai modellben, $500\text{Mpc}h^{-1}$ élhosszúságú periodikus kockában [77]. A szimuláció térbeli felbontása akkora volt, hogy egy Tejút méretű sötét anyag halót 1000 részecskével tudott felbontani. Ez lett a kozmológiában legtöbbet használt szimuláció, több mint 1000 kutatás használta a szimuláció eredményeit, és összesen 4600 hivatkozást kapott az eredeti cikk. Korunk legmeghatározóbb kozmológiai szimulációját igen sok hasonló szimuláció követte, ezek egyre részletesebben, vagy egyre nagyobb térfogatban modellezték a struktúrák kialakulását.

A fent említett kozmológiai szimulációk mindegyike ugyanazt a periodikus határfeltételt használta. A következő két fejezetben részletesen bemutatom a standard kozmológiai modellt, és a struktúráképződés modellezését periodikus határfeltétel mellett. A dolgozat későbbi fejezeteiben leírom az új szimulációs algoritmusom, aminek segítségével lehetséges végtelen nagy univerzumok szimulálása periodikus határfeltételek nélkül.

2. fejezet

A standard kozmológiai modell

2.1. A homogén és izotróp univerzumot leíró egyenletek

A kozmológiai elv kimondja, hogy az Univerzum megfelelően nagy skálákon tekintve homogén és izotróp. Ebben a fejezetben felírom a homogén Univerzumot leíró egyenleteket, majd bemutatom ezen egyenletek egyszerűbb megoldásait. Az

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Einstein-egyenletek az általános relativitáselmélet alapegyenletei. Itt Λ a kozmológiai állandót,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}}{\partial x^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\eta}^{\eta}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\eta\xi}^{\xi} - \Gamma_{\mu\eta}^{\xi}\Gamma_{\nu\xi}^{\eta} \quad (2.2)$$

a Ricci-tenzort,

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

a Ricci-skalárt,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} \right) \quad (2.4)$$

a Christoffel-szimbólumot, $g_{\mu\nu}$ a metrikus tenzort és $T_{\mu\nu}$ az energia-impulzus-tenzort jelöli. Három metrika teljesíti a kozmológiai elvet, ezeket a k görbületi paraméterrel különböztetjük

meg hipergömbi koordinátákban. Az ívelemnégyszet ezekben a metrikákban

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \cdot d\Sigma^2 \quad (2.5)$$

alakban írható fel, ahol $a(t)$ a skálaparaméter és

$$d\Sigma^2 = \begin{cases} (dr^2 + \frac{\sin^2(r\sqrt{k})}{k} \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2)) & \text{ha } k > 0 \text{ (hipergömb esete)} \\ (dr^2 + r^2 \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2)) & \text{ha } k = 0 \text{ (euklideszi sík esete)} \\ (dr^2 + \frac{\sinh^2(r\sqrt{|k|})}{|k|} \cdot (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2)) & \text{ha } k < 0 \text{ (hiperbolikus tér esete)} \end{cases} \quad (2.6)$$

az együttmozgó távolság négyzete. A k görbületi paraméter valójában a tér gaussi görbülete, és $1/\text{hossz}^2$ dimenziójú. Ezt a három metrikát nevezzük Friedmann–Robertson–Walker (FRW) metrikának. Az energia-impulzus tenzor homogén, ideális folyadék esetén a következő alakban írható le:

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

ahol ρ a folyadék energiasűrűsége, p a nyomása, és u^μ a folyadék négyessebessége, ez a folyadékkal együttmozgó rendszerben: $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$.

A felírt metrikát és energia-impulzus tenzort be kell helyettesíteni az 2.1 egyenletbe. Az idő-idő komponens, átrendezés után a következő alakot ölti:

$$H^2(t) := \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (2.8)$$

Ez az első Friedmann-egyenlet. $H(t)$ -t Hubble-paraméternek szokás nevezni. A többi komponens felhasználásával megkaphatjuk a második Friedmann-egyenletet:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.9)$$

Ez két egyenlet $a(t)$ -re. Az első egyenletet deriválva, \ddot{a}/a -t kifejezve, és visszahelyettesítve a második Friedmann-egyenletbe a következő összefüggés kapható:

$$\frac{d\rho}{da} = -\frac{3}{a} \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right). \quad (2.10)$$

A sűrűséget és a nyomást a

$$p = wc^2\rho \quad (2.11)$$

állapotegyenlet kapcsolja össze. A w paraméter értéke 0 nemrelativisztikus anyagra és $1/3$ sugárzásra. Adott w paraméterre könnyen megoldható a 2.10 egyenlet:

$$\rho_m(a) = \rho_{m,0}a^{-3} \quad (2.12)$$

nemrelativisztikus anyagra, és

$$\rho_r(a) = \rho_{r,0}a^{-4} \quad (2.13)$$

sugárzásra. Legyen a kritikus sűrűség

$$\rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (2.14)$$

Ahol az alsó 0 index a mai állapotot jelöli, és H_0 a Hubble-állandó. Bevezethetők a következő paraméterek:

$$\Omega_{m,0} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{crit,0}} \quad (2.15)$$

$$\Omega_{r,0} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{crit,0}} \quad (2.16)$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \quad (2.17)$$

$$\Omega_{k,0} = \frac{-kc^2}{H_0^2} \quad (2.18)$$

Ezek felhasználásával egyszerű alakra hozható az első Friedmann-egyenlet [25]:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \cdot (\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}a^{-2}) \quad (2.19)$$

A bevezetett Ω_0 paraméterek nem teljesen függetlenek egymástól. A 2.19 egyenletet $t = t_0$ mai

állapotra felírva, tehát $a = 1$, $H(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = H_0$ esetben belátható, hogy

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1, \quad (2.20)$$

tehát az Univerzum összetétele egyértelműen meghatározza a görbületet, és így a geometriát. Továbbá bevezethetők az

$$\Omega_m(t) = \frac{8\pi G \rho_m(t)}{3H(t)^2} \quad (2.21)$$

$$\Omega_r(t) = \frac{8\pi G \rho_r(t)}{3H(t)^2} \quad (2.22)$$

$$\Omega_{\Lambda}(t) = \frac{\Lambda c^2}{3H(t)^2} \quad (2.23)$$

$$\Omega_k(t) = \frac{-kc^2}{H(t)^2 a(t)^2} \quad (2.24)$$

időfüggő Ω paraméterek. Ezekre is érvényes a 2.20 összefüggés, minden időpillanatban.

2.2. A Friedmann-egyenletek megoldásai

Az Ω_0 sűrűségparaméterek és a H_0 Hubble-állandó egyértelműen meghatározza a homogén Univerzum tágulási történetét a 2.19 egyenleten keresztül. A legkönnyebben megkapható megoldások azok, ahol egy tetszőlegesen választott Ω paraméter értékét egységre állítjuk, majd minden egyéb Ω paramétert zérusra állítunk. Ebben az esetben a Friedmann egyenletek analitikusan megoldható, szeparábilis differenciálegyenletek lesznek. A megoldásokat a 2.1 táblázatban foglaltam össze.

	név	skálafaktor	t_{kor}
$\Omega_r = 1$	Sugárzás dominált	$a(t) = (H_0 t)^{1/2}$	$\frac{1}{2H_0}$
$\Omega_m = 1$	Einstein-de Sitter (EdS)	$a(t) = \left(\frac{2}{3} H_0 t\right)^{2/3}$	$\frac{2}{3H_0}$
$\Omega_{\Lambda} = 1$	de Sitter	$a(t) = e^{H_0 t}$	∞
$\Omega_k = 1$	Üres univerzum	$a(t) = H_0 t$	$\frac{1}{H_0}$

2.1. táblázat. A Friedmann-egyenletek egyszerű megoldásai. Az univerzum t_{kor} kora alatt az $a = 0$ és $a = 1$ állapotok kötött eltelt időt értjük.

Ha két sűrűségparaméter nem zérus, akkor is létezik analitikus megoldás. Ezek közül a

legfontosabban az $\Omega_m + \Omega_k = 1$ és $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ megoldások. Célszerű átállni ezekben az esetekben az

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} \quad (2.25)$$

konform időváltozóra [25]. Ekkor a 2.19 egyenlet a következő alakot ölti csak anyagot tartalmazó esetben:

$$\left(\frac{da(\eta)}{d\eta} \right)^2 = H_0^2 \Omega_{m,0} a(\eta) - H_0^2 (\Omega_{m,0} - 1) a(\eta)^2 \quad (2.26)$$

Ennek az egyenletnek a megoldása

$$a(\eta) = \begin{cases} \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0}-1)} (1 - \cosh(H_0 \sqrt{1 - \Omega_{m,0}} \eta)) & \text{ha } \Omega_{m,0} < 1 \\ \frac{1}{4} H_0^2 \eta^2 & \text{ha } \Omega_{m,0} = 1 \text{ (Einstein-de Sitter megoldás)} \\ \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0}-1)} (1 - \cos(H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} \eta)) & \text{ha } \Omega_{m,0} > 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

Ahhoz, hogy megkapjuk a valódi időfüggést, invertálni kell a konform időt definiáló 2.25 összefüggést. Ezeket a megoldásokat a 2.1a ábrán mutatom be. Látható, ha $\Omega_{m,0} > 1$, vagyis ha a nem relativisztikus anyag sűrűsége nagyobb, mint a kritikus sűrűség, akkor a skálafaktornak létezik maximuma. A maximum elérése után az Univerzum összehúzódik, majd a

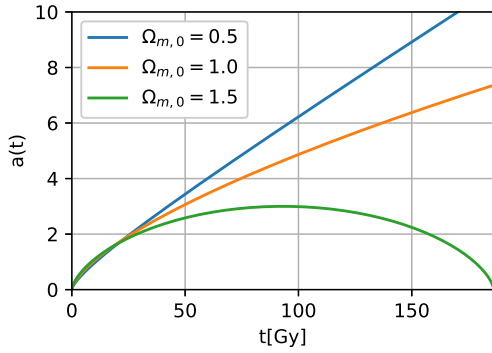
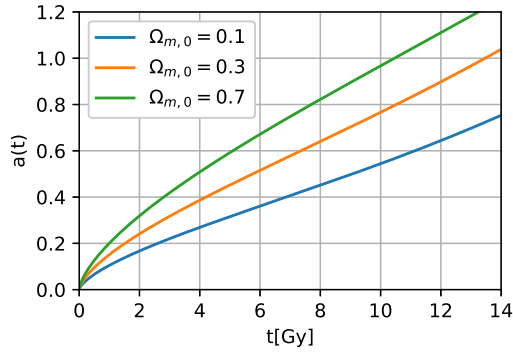
$$t_{min} = \frac{\pi \Omega_m}{H_0 (\Omega_m - 1)^{3/2}} \quad (2.28)$$

időpillanatban újra zérus lesz a skálafaktor [25]. Ha a sűrűség kisebb, mint ρ_c , akkor a tágulás sebessége aszimptotikusan tart egy nem zérus értékhez.

Hasonló módszerrel megoldható az $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ eset is. Ekkor a megoldás a

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} t \right) \quad (2.29)$$

alakban írható fel [34]. Ezeket a megoldásokat a 2.1b ábrán mutatom be. Könnyen belátható, hogy korai idők esetén a skálafaktor arányos $t^{2/3}$ -al, míg késői időkre exponenciális függvényhez

(a) $\Omega_m + \Omega_k = 1$ (b) $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$

2.1. ábra. A Friedmann-egyenletek analitikus megoldásai. A H_0 Hubble-állandó értéke $70,0 \text{ km/s/Mpc}$ volt mindegyik megoldás esetén.

tart.

2.3. Kozmológiai távolságok

Egy távoli objektumról érkező foton

$$z = \frac{\lambda_{\text{megfigyelt}} - \lambda_{\text{kibocsátott}}}{\lambda_{\text{kibocsátott}}} \quad (2.30)$$

vöröseltolódást szenved, ahol $\lambda_{\text{kibocsátott}}$ és $\lambda_{\text{megfigyelt}}$ a forrás által kibocsátott és a mért hullámhossza a detektált fotonnak. Rövid számolással megkapható, hogy egy FRW metrikában az alábbi kapcsolat áll fenn a skálafaktor és a vöröseltolódás között a

$$z = \frac{a_0}{a_{\text{objektum}}} - 1 \quad (2.31)$$

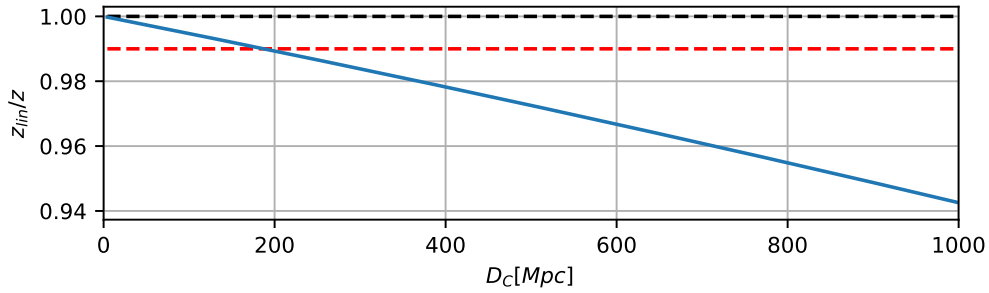
[51], ahol a_0 a megfigyelés pillanatában, és a_{objektum} a foton kibocsátásának pillanatában a skálafaktor. A mai állapothoz tartozó skálafaktort szokás egységnyinek tekinteni, és a továbbiakban én is ezt a konvenciót használom. Az adott z vöröseltolódású objektumnak több módon is értelmezhető a távolsága [16]. Ha a megfigyelő és a vizsgált objektum számára az Univerzum izotróp – vagyis együtt mozognak a Hubble-áramlással – akkor együttmozgó koordinátákban mért távolságuk

$$D_C(z) = \int_{t(a)}^{t_0} \frac{c \cdot dt'}{a(t')} = \int_a^1 \frac{c \cdot da'}{a'^2 H(a')} = \int_0^z \frac{c \cdot dz}{H(z)}. \quad (2.32)$$

Kis vöröseltolódások esetén a fenti képlet sorba fejthető, és a megfelelő átrendezések után megkapható a Hubble-törvénynek nevezett

$$c \cdot z(D_C) \simeq H_0 \cdot D_C \quad (2.33)$$

lineáris formula. A valódi vöröseltolódás együttmozgó távolságtól való függése és a lineáris közelítés közötti eltérés látható a 2.2 ábrán $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$, $\Omega_k = 0$ összetételű kozmológia esetén. Látható, hogy az elkövetett hiba kisebb, mint 1%, ha a képlet használata a $D_C < 200 \text{ Mpc}$ tartományra korlátozódik.



2.2. ábra. A lineáris Hubble-törvényből számított $z_{lin}(D_C)$ és a valódi kozmológiai $z(D_C)$ vöröseltolódás hányadosa $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$ és $\Omega_k = 0$ kozmológiai paraméterek esetén. Látható, hogy a lineáris törvény mindig túlbecsüli a távolságot, és használata $\approx 200 \text{ Mpc}$ alatt jár 1%-nál kisebb hibával.

Másik fontos távolság a szögátmérő-távolság. Adott l fizikai méretű, gravitációsan kötött, ϑ szög alatt látszódó objektum távolsága

$$D_A = \frac{l}{\vartheta} \quad (2.34)$$

euklideszi térben. Kozmológiai távolságok esetén figyelembe kell venni az Univerzum tágulását. Ekkor a

$$D_A(z) = \frac{S_k(D_C)}{1+z} \quad (2.35)$$

képlet megadja a szögátmérőtávolságot, ahol

$$S_k(D_C) = \begin{cases} \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_m|}} \sin(\sqrt{-\Omega_m} H_0 D_C) & \text{ha } \Omega_{m,0} < 1 \\ D_C & \text{ha } \Omega_{m,0} = 1 \\ \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_m|}} \sinh(\sqrt{\Omega_m} H_0 D_C) & \text{ha } \Omega_{m,0} > 1 \end{cases} \quad (2.36)$$

Egy L luminozitású forrás fluxusa

$$F = \frac{L}{4\pi D_L}, \quad (2.37)$$

ahol D_L a luminozitástávolság. Ennek vöröseltolódás-függése egyszerűen számítható az együttmozgó távolságból:

$$D_L(z) = (1 + z)D_C(z) \quad (2.38)$$

Kozmológiai megfigyelések esetén gyakran használt mennyiség a

$$DM = 5 \cdot \log_{10} \left(\frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right) - 5 \quad (2.39)$$

távolságmodulus.

2.4. A Λ CDM modell

A modern csillagászati megfigyelések a XX. század végén és a XXI. század elején lehetővé tették a kozmológiai paraméterek meghatározását. A Paraméterek meghatározása alapvetően három módszeren alapul: A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás fluktuációs spektrumának mérésén, az Ia szupernóva megfigyeléseken, és az univerzumban megfigyelhető struktúrák feltérképezésén és statisztikai analíziséen. Ez a három megfigyelés megegyezett abban, hogy az Univerzumban jelentős a kozmológiai állandó hatása (Λ), és a barionos anyag mellett nagy mennyiségben tartalmaz hideg sötét anyagot (Cold Dark Matter - CDM).

2.4.1. Az Ia típusú szupernóvák

A fehér törpék olyan kompakt csillagok, melyek magjában leállt a fúzió a hélium-égés után, és a degenerált elektrongáz nyomása tart ellen a gravitációnak. Ez a nyomás csak addig képes egyensúlyban tartani a csillagot, amíg annak tömege kisebb, mint a $M_{Ch} = 1,44M_{\odot}$ Chandrasekhar-határ. Ha egy ilyen csillag kettős rendszerben van, akkor lehetséges, hogy társától anyagot vesz át, és így növelni tudja a tömegét. Ha a tömege átlépi a M_{Ch} limitet, akkor a beinduló szén fúzió hatására a csillag felrobban, és Ia szupernóvaként lesz látható. Mivel mindig ugyanolyan tömeg esetén következik be a robbanás, ezért feltehetően a luminozitásuk is azonos, ezért felvetődött a lehetőség, hogy ezek az objektumok használhatók az anyagaxisuk luminozitástávolságának meghatározására.

Ahhoz hogy megmérjük az Ia szupernóvák abszolút fényességét, néhány közeli ilyen eseménynek meg kell határozni a távolságát. A legközelebbi ilyen szupernóvák túl messze vannak ahhoz, hogy látható legyen a parallaxisuk, ezért egy köztes standard gyertyára van szükség, melyek távolsága parallaxissal meghatározható, és segítségükkel kalibrálhatók az Ia események. Erre a célra megfelelnek a cefeida változócsillagok. Ezek abszolút fényessége periodikus változásokat mutat. Ennek a változásnak a periódusideje és a csillag abszolút fényessége között szoros kapcsolat van, így a periódus és a látszólagos magnitúdójuk megméréseivel meghatározható a távolságuk. A közelebbi ilyen csillagok távolsága parallaxissal meghatározható, így a fent említett összefüggés kalibrálható.

A közeli Ia szupernóvák megfigyeléséből kiderült, hogy az abszolút magnitúdójuk nem azonos, de a fénygörbe lefutásának figyelembevételével kalibrálhatók, és használhatók standard fényforrásként [33]. Ezután a felfedezés után csupán két évvel a Supernova Cosmology Project és a High-z Supernova Search csoportok meghatározták Ia szupernóvák segítségével a távolságmodulus-vöröseltolódás függvényt $z = 1$ -ig [53; 65]. A mérések egyértelművé tették, hogy az Univerzumunk gyorsulva tágul. Ez akkor lehetséges, ha $\Omega_{m,0} \leq 2\Omega_{\Lambda,0}$ sík, csak nem-relativisztikus anyagot és kozmológiai állandót tartalmazó Univerzum esetén. Az adatok rész-

letes elemzése során meg tudták becsülni a kozmológiai paraméterek értékét, és azt találták, hogy hozzávetőlegesen a Λ -hoz tartozó energiasűrűség két-három szorosa a nem relativisztikus anyagénak.

2.4.2. A sötét anyag

A galaxisklaszterek sebességszperziójából már Fritz Zwicky az 1930-as években kimutatta, hogy ezeknek az objektumoknak a tömege jelentősen nagyobb, mint ami a látható anyag mennyiségéből következne. Ez a megfigyelést a XX. század második felében több mérés is megerősítette: a spirálgalaxisok rotációs görbéje, illetve az elliptikus galaxisok csillagainak sebességszperziója, a galaxisklaszterek gravitációs lencsézése, továbbá az ütköző galaxisklaszterek dinamikája. Mára világossá vált, hogy az Univerzumban lévő nemrelativisztikus anyag hozzávetőlegesen 15%-a az általunk ismert barionos anyag. A barionokhoz tartozó kozmológiai sűrűség paramétert Ω_b -vel jelölik. A fennmaradó nemrelativisztikus anyagot nevezzük sötét anyagnak, és az ehhez tartozó Ω_{DM} sűrűség paraméter adja hozzávetőlegesen az Univerzum energiasűrűségének negyedét.

A jelenlegi modellek megkülönböztetnek hideg, meleg, és forró sötét anyagot. Ezek között a részecskék sebességszperziójában van különbség. Ezekben a modellekben a struktúrák máshogy fejlődnek időben, így a nagyskálás szerkezet kialakulásának szimulációjával és a megfigyelésekkel történő összehasonlításával megkülönböztethetők ezek a modellek. A jelenlegi szimulációk akkor egyeznek a megfigyelésekkel, ha a sötét anyag sebességterét csak a kezdeti sűrűségfluktuációk hatására alakul ki, azaz ha hideg sötét anyagot tartalmaznak. A hideg sötét anyag dinamikájával és fejlődésének modellezésével a 3. fejezetben foglalkozom részletesen.

2.4.3. A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás

A kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás (Cosmic Microwave Background - CMB) egy majdnem izotróp, az Univerzumot kitöltő termikus sugárzás. Az ősrobbanás után nagyjából 380000 évvel keletkezett, mikor az univerzum hőmérséklete 3000K alá süllyedt. Ezen hő-

mérséklet felett az Univerzum átlátszatlan, mivel a szabad töltéseken könnyen szóródnak a fotonok. 3000K alatt kialakulnak a semleges atomok, így a sugárzás többé nem szóródik, "lecsatolódik" a barionikus anyagról. Az eredetileg $\approx 3000\text{K}$ hőmérsékletű sugárzást látjuk ma $T_{CMB} = 2,72548 \pm 0,00057\text{K}$ -es kozmikus mikrohullámú háttérként [22], mivel a lecsatolódás óta az Univerzum ≈ 1100 -szeresére tágult.

Az Univerzum ilyen korai állapotában is kellett lenniük fluktuációknak az anyag eloszlásában. A sűrűbb régiókból érkező fotonok mélyebb gravitációs potenciálból indulnak, így kicsit nagyobb gravitációs vöröseltolódást szenvednek el, mint a ritkább területekről érkezők. Ezek alapján a mikrohullámú háttér hőmérsékleti térképén kis fluktuációkként jelentkeznek a korai sűrűség-ingadozások. Végül ezeket a COBE (COsmic Background Explorer) műhold 1992-ben megfigyelte [75], és a fluktuációk nagysága $\Delta T/T_{CMB} \simeq 10^{-5}$ -nek adódott. A relatív hőmérsékleti fluktuációk az éggömbön gömbi harmonikusok szerint sorba fejthetők:

$$\frac{\Delta T(\vartheta, \varphi)}{T_{CMB}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (2.40)$$

ahol ϑ és φ a gömbi szögkoordináták [25]. A fluktuációk

$$C_l = \frac{1}{2(l+1)} \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \quad (2.41)$$

gömbi teljesítményspektruma meghatározható a korai plazma dinamikájából elméleti úton. Ez természetesen függ a kozmológiai paramétereiktől, így a valódi CMB spektrumának mérésével meghatározhatók a kozmológiai paraméterek. A különböző csúcsok nagysága, pozíciója, és egymáshoz viszonyított aránya a CMB gömbi teljesítményspektrumban megadja a görbületet, a barionikus anyag arányát a teljes nem relativisztikus anyaghoz viszonyítva, a sötét anyag mennyiségét, a tágulás sebességét, és sok egyéb fontos adatot a korai univerzumból. Itt a tágulás sebességéből mód van arra, hogy adott kozmológiai modellt feltételezve ennek mai értékét a többi kozmológiai paraméter felhasználásával kiszámítsuk, és így meghatározzuk a Hubble-állandót. Már a korai mérések megmutatták, hogy az Univerzumunk nagyon közel van a sík állapothoz, vagyis $\Omega_k \simeq 0$. A fentebb bemutatott kozmológiai paraméterek a Planck műhold mikrohullámú háttér mérései alapján a 2.2 táblázatban találhatók [56].

Paraméter	Érték(68% limit)
H_0	$(67,74 \pm 0,46)\text{km/s/Mpc}$
$\Omega_{b,0}$	$0,0486 \pm 0,0010$
$\Omega_{m,0}$	$0,3089 \pm 0,0062$
$\Omega_{r,0}$	$(9,28 \pm 0,24) \cdot 10^{-5}$
$\Omega_{\Lambda,0}$	$0,6911 \pm 0,0062$
$\Omega_{k,0}$	$0,00008 \pm 0,004$
σ_8	$0,8159 \pm 0,0086$

2.2. táblázat. A Planck kollaboráció által meghatározott kozmológiai paraméterek Λ CDM kozmológia esetén.

2.4.4. A Hubble-állandó

A standard kozmológiai modell egyik igen fontos paramétere a Hubble-állandó, amely megadja a tágulás jelenlegi sebességét. A 2010-es években kiderült, hogy ellentmondás van a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzásból számított, és a lokális mérésekből meghatározott Hubble-állandó között [24]. A legújabb CMB mérések szerint $H_{0,\text{CMB}} = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [57], viszont a lokális mérések jelentősen nagyobb, $H_{0,\text{local}} = 74,03 \pm 1,42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [64] értéket adnak, így az eltérés 2019-ben $4,4\sigma$. A lokális mérések közvetlenül mérik a tágulási sebességet, míg a CMB mérések esetén adott kozmológiai modellt felhasználva számítják ki a mai tágulási sebességet, a $z = 1089,9$ vöröseltolódáson mért adatokból. Ez az eltérés a mai kozmológia egyik nagy problémája, és még nem született kielégítő magyarázat. Felmerült, hogy a Λ CDM kozmológiai modell nem jól írja le a korai és a mai univerzum között eltelt időben a tágulás ütemét, tehát nem lehet vele $z = 0$ -ra extrapolálni. Egy másik lehetőség az ellentmondás feloldására, hogy valamilyen figyelembe nem vett szisztematikus hiba van valamelyik mérési módszerben.

A legtöbb ilyen lokális mérés lényege, hogy adott objektumok, például Ia típusú szupernóvák, vagy cefeida változocsillagok távolságát és vöröseltolódását egymástól függetlenül meghatározzák. A mért adatokat ábrázolva felrajzolható a Hubble-diagram, és ebből meghatározható a Hubble-állandó. Ha a felmérés csak kis vöröseltolódású objektumokat tartalmaz, akkor ez megtehető egy egyszerű egyenes illesztésével. Ha távolabbi objektumokat is tartalmaz a felmérés, akkor figyelembe kell venni az Univerzum tágulási történetét, így lehetőség nyílik több

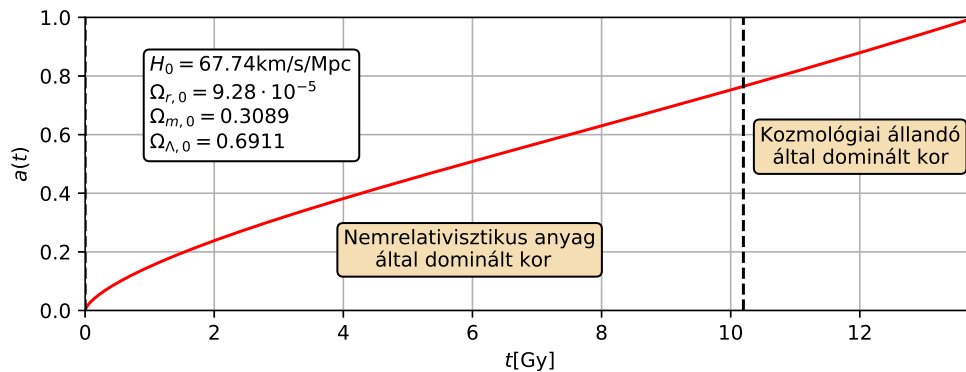
kozmológiai paraméter meghatározására is. A lokális mérések nem illeszkednek pontosan az elméleti görbére: a megfigyelt objektumok a Hubble-áramláshoz viszonyított sajátmozgásából eredő Doppler-eltolódás hozzáadódik a kozmológiai vöröseltolódáshoz. Ennek két hatása van a mérésekre: a kisebb skálákhoz tartozó struktúrák zajként jelentkeznek, továbbá torzítást okozhatnak a felmérés méreténél nagyobb hullámhosszú sűrűségfluktuációk. Az utóbbiak akár jelentősen is torzíthatják az illesztett H_0 értékét, mivel ha a vizsgált térfogat sűrűsége eltér az Univerzum átlagsűrűségétől, akkor ez a térfogat más sebességgel fog tágulni [14].

2.4.5. Az Univerzum tágulási története

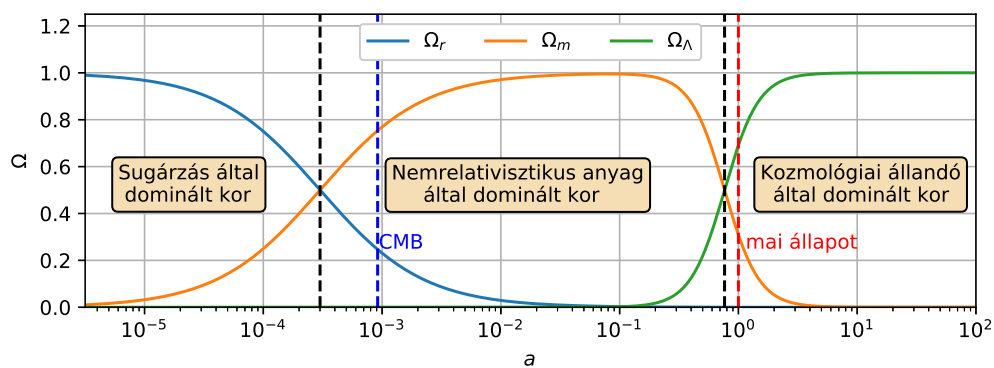
A kozmológiai paraméterek ismeretében rekonstruálható az Univerzum tágulási története. Mivel a CMB mérések azt mutatták, hogy az Univerzumunk görbülete zérus mérési hibán belül, ezért a továbbiakban a görbülettől eltekintek. Bevezethetők különböző korszakok az Univerzum történetében annak függvényében, hogy melyik komponenshez tartozó Ω paraméter befolyásolja leginkább a tágulás dinamikáját. A különböző energiasűrűségek skálafaktorfüggése formálisan felírható

$$\rho_x \sim a^{-n_x} \quad (2.42)$$

alakban, ahol n_x értéke sugárzásra 4, nemrelativisztikus anyagra 3, és kozmológiai állandóra 0. Ha kellően korai időket tekintünk, azaz a skálafaktor elég kicsi, a sugárzás dominálja a tágulás dinamikáját. Ekkor $a \sim t^{1/2}$. Ez a korszak addig tart, míg nem lesz jelentős a nemrelativisztikus anyag energiasűrűsége a sugárzáshoz képest. Felhasználva 2.19, 2.21 és 2.22 egyenleteket, továbbá a mérésekből meghatározott $\Omega_{m,0}$ és $\Omega_{r,0}$ paramétereket, látható, hogy $\Omega_r(t_-) = \Omega_m(t_-)$ $a_- = 3,004 \cdot 10^{-4}$ skálafaktornál teljesül. Ekkor az Univerzum kora $t_- = 53000$ év volt. Ezután az időpont után a tágulást már a nemrelativisztikus anyag, majd még később a kozmológiai állandó dominálja. Ennek a két komponensnek együttes hatása leírható a 2.29 analitikus megoldással az első százezer évet leszámítva. Ha még pontosabb megoldást kell használni, akkor célszerű a 2.19 egyenlet integrálása numerikusan. A 2.2 táblázatban feltüntetett kozmológiai paraméterek felhasználásával, numerikusan megoldottam a Friedmann egyenleteket. A kapott megoldás a 2.3 ábrán látható.



(a) A skálafaktor időfüggése.

(b) Az időfüggő Ω paraméterek a kozmológiai skálafaktor függvényében.

2.3. ábra. A Friedmann egyenletek megoldása a Planck kollaboráció által meghatározott Λ CDM kozmológiai paraméterekre. A fekete szaggatott vonalak jelölik a különböző korszakok határát. Kék szaggatott vonallal jelöltem a kozmikus mikrohullámú háttérhez, illetve vörössel a mai állapothoz tartozó skálafaktort.

3. fejezet

Kozmológiai struktúrafejlődés statisztikus leírása

A lokális Univerzumban a megfigyelhető anyag eloszlása nem homogén, a $\rho(\mathbf{x})$ sűrűségmező értéke több nagyságrenden belül változik a galaktikus méretektől a több száz Mpc nagyságú skálákig. Ezek a ma megfigyelhető nagy fluktuációk a gravitáció hatására alakultak ki kezdeti kis sűrűség-ingadozásokból. Ezek a primordiális fluktuációk a ma elfogadott elméletek alapján a nagyon korai Univerzum rendkívül gyors exponenciális tágulása során alakultak ki. A sugárzás lecsatolódásáig a gravitáció hatására a dimenziótlan

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\langle \rho \rangle} - 1 \quad (3.1)$$

sűrűségfluktuációk $\delta \approx 10^{-5}$ nagyságrendűre nőttek, és ezeket látjuk ma a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzásban. Ma, a $z = 0$ vöröseltolódás közelében a rövidhullámú, galaxis méretű fluktuációk nagysága $\delta \approx 10^6$.

Ahhoz, hogy megfelelően leírassuk ezeket a fluktuációkat, és vizsgálhassuk a fejlődésüket, érdemes bevezetni a

$$\xi(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (3.2)$$

korrelációs függvényt és a

$$P(\mathbf{k}) = |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \quad (3.3)$$

teljesítményspektrumot, ahol

$$\delta_{\mathbf{k}} = \int \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}} d^3x \quad (3.4)$$

a sűrűségkontraszt Fourier-transzformáltja. Egy olyan univerzumban, ahol nincsenek kitüntetett irányok a teljesítményspektrum nagysága csupán a \mathbf{k} vektor k nagyságától függ. Ezt felhasználva látható, hogy az izotróp $P(k)$ teljesítményspektrum tartalmazza a struktúrák statisztikus leírásához szükséges összes információt. Hasonló megfontolással megkapható a $\xi(r)$ izotróp korrelációs függvény. A két függvény között a

$$\xi(r) = \frac{V}{2\pi^3} \int P(k) \frac{\sin kr}{kr} 4\pi k^2 dk \quad (3.5)$$

transzformáció ad kapcsolatot [51], ahol V a vizsgált térfogat. Ezek a függvények és időfüggésük igen fontosak a kozmológiában, mivel függenek a kozmológiai paraméterektől, így használhatók a megfigyelések és a kozmológiai modellek összehasonlítására.

A korai időkben a struktúrák fejlődése követhető perturbációszámítás segítségével. A részletes számítások megtalálhatók a [25] könyvben, itt csak az eredményeket közlöm. A lineáris perturbációszámításban a Φ gravitációs potenciál fluktuációit számítjuk ki, és ehhez a különböző anyagfajták másképpen csatolódnak a különböző korokban. A k hullámszámú fluktuációk fejlődését három, jól elkülöníthető szakaszra lehet osztani a 2.25 képlettel bevezetett η konformális időváltozó segítségével. Ha $k\eta \ll 1$, akkor a hullámhossz nagyobb mint a horizont, és a módus nem fejlődik, azaz a horizonton túli fluktuációk amplitúdója konstans. $k\eta \approx 1$ esetén a hullámok a horizonton belülre kerülnek és fejlődésüket az határozza meg, hogy az anyagsugárzás energiasűrűségének egyenlőségéhez képest (a_{eq}) mikor történik meg. Az utolsó, $k\eta \gg 1$ esetben a hullámhossz jóval kisebb mint a horizont, ezek a módusok egységesen, hullámhosszuktól függetlenül fejlődnek, a nemlineáris szakaszig. Ezeket a tartományokat megfelelően figyelembe véve perturbációszámítással meghatározható a nemrelativisztikus anyaghoz tartozó teljesítményspektrum, amíg a fluktuációk kellően kicsik. A részletes számítások elvégzése után a teljesítményspektrum

$$P(k, a) = D(a)^2 \cdot T(k)^2 \cdot P_0(k) \quad (3.6)$$

alakú lesz, ahol $D(a)$ a növekedési függvény, $T(k)$ az átviteli függvény, és $P_0(k)$ a primordiális

teljesítményspektrum. Leggyakrabban feltételezett a kezdeti teljesítményspektrum a Harrison-Zeldovics spektrum, ami egyszerű hatványfüggvény alakú. Az átviteli függvény megadja, hogy hogyan módosul a kezdeti spektrum alakja annak hatására, hogy az a_{eq} állapotban a különböző módusok nagyobbak vagy kisebbek voltak-e a horizont méreténél, illetve részletes számolásoknál tartalmazza a barionikus hatásokat is, mivel ezek nem skálafüggetlenek. $T(k)$ csak viszonylag nagy vöröseltolódásokig, és csak alacsony rendben számítható perturbatív módszerekkel. A növekedési függvény megadható zárt alakban:

$$D(a) = \frac{5\Omega_m H_0^2}{2} \frac{\dot{a}}{a} \int_0^a \frac{da'}{\dot{a}'^3}. \quad (3.7)$$

Ennek segítségével lineáris elméletben a 3.6 képlet felhasználásával tetszőleges skálafaktorokra elfejleszthető a teljesítményspektrum, mivel itt a módusok egymástól függetlenül fejlődnek. Az ezzel a módszerrel kiszámított teljesítményspektrum csak akkor fog megegyezni a valódival, ha a nemlineáris tagok hatása kellően kicsi.

A fluktuációkat jellemző fontos kozmológiai paraméter a

$$\sigma_8^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P_{\text{lin}}(\mathbf{k}) \hat{W}(\mathbf{k}, R = 8\text{Mpc}/h) = \frac{1}{2\pi^2} \int P_{\text{lin}}(k) \hat{W}(k, R = 8\text{Mpc}/h) k^2 dk, \quad (3.8)$$

ahol $\hat{W}(\mathbf{k}, R) = \hat{W}(k, R) = \frac{3}{(kR)^3} (\sin(kR) - kR \cos(kR))$ az R sugarú gömbi ablakfüggvény Fourier transzformáltja és $P_{\text{lin}}(\mathbf{k})$ a lineáris elméletben számított mai teljesítményspektrum. Így σ_8 megadja az $R = 8\text{Mpc}/h$ skálákon a fluktuációk nagyságát lineáris elméletben, a mai állapotra extrapolálva.

A fenti perturbációs eredményekkel a mai állapothoz tartozó teljesítményspektrum nem határozható meg $k > 0,1h/\text{Mpc}$ skálákra, mivel a késői időkben túl nagyok lesznek a fluktuációk. A nemlineáris fejlődés kielégítő pontossággal kozmológiai N-test szimulációkkal modellezhető.

3.1. Kozmológiai N-test szimulációk

Az Univerzumunkban lévő nemrelativisztikus anyag jelentős része hideg sötét anyag a ma elfogadott standard kozmológiai modell szerint. Ennek nemlineáris fejlődését leggyakrabban az N-test módszerrel számítjuk, melynek lényege, hogy az ideális folyadéknak tekintett, csak gravitációsan kölcsönható sötét anyaghoz tartozó sűrűség- és sebességmezőt diszkrét részecskékkel mintavételezzük, majd az ezekre felírt mozgásegyenleteket megoldjuk. Ehhez newtoni közelítést alkalmazunk $a(t)$ -vel paraméterezett FRW metrikában. Ez azt jelenti, hogy a távolságok konkrét dinamikáját kívülről rakjuk a szimulációba úgy, hogy a részecskék közötti távolságokat és sebességeket minden időlépésben átskálázzuk a kozmológiai paraméterek megfelelő Friedmann-egyenletek megoldásainak megfelelően. A newtoni közelítés azért alkalmazható, mert a sebességek nem relativisztikusak, és a gravitációs tér gyenge [39]. A mai felmérések megfelelő modellezéséhez szükséges a részecskeszám több száz milliótól akár több száz milliárdig is terjedhet, így ezt a problémát természetesen numerikusan, szuperszámítógépeken vizsgáljuk. A kis távolságok esetén fellépő kezelhetetlenül nagy, $1/r^2$ -el arányos erők miatt mindenképp simítást kell alkalmazni. A simítás úgy történik, hogy a pontszerű részecskékhez tartozó Dirac-delta sűrűségmezőt egy gömbszimmetrikus, kiterjedt sűrűségmezővel helyettesítjük. A leggyakrabban használt simítási kernel a Plummer-kernel, illetve a köbös spline-kernel [15; 46]. Együttmozgó koordinátákban a mozgást a

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^N \frac{m_i m_j \mathbf{F}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i + h_j)}{a(t)^3} - 2 \cdot m_i \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \quad (3.9)$$

egyenletek írják le, ahol \mathbf{x}_i és m_i az együttmozgó koordinátái a részecskéknek, h_i és h_j a részecskékhez tartozó simítási hossz. Az egyenlet jobb oldalán lévő $-2 \cdot m_i \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i$ tag a Hubble-féle fékezési tag. Az $m_i m_j \mathbf{F}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i + h_j)$ függvény megadja az erő nagyságát és irányát a tömegpontok között, és a simítási kerneltől és a határfeltételektől függ. Szabad határfeltétel esetén

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, h) = -G\mathcal{F}(|\mathbf{x}|, h) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad (3.10)$$

ahol G a Newton-féle gravitációs állandó, és a leggyakrabban használt köbös spline-kernel [76; 46] esetén

$$\mathcal{F}(r, h) = \begin{cases} \frac{32r^4}{h^6} - \frac{38,4r^3}{h^5} + \frac{32r}{3h^3} & \text{ha } r < \frac{h}{2} \\ -\frac{32r^4}{3h^6} + \frac{38,4r^3}{h^5} - \\ -\frac{48r^2}{h^4} + \frac{64r}{3h^3} - \frac{1}{15r^2} & \text{ha } \frac{h}{2} < r < h \\ \frac{1}{r^2} & \text{ha } h < r. \end{cases} \quad (3.11)$$

Mivel egy végtelen nagy Univerzum szimulálása állandó felbontás mellett véges memóriájú és számítási teljesítményű számítógépeken nem lehetséges, ezért célszerű egy kisebb térfogatban futtatni, periodikus határfeltétel mellett. Ekkor az erőt az

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, h) = \sum_{\mathbf{n}} -G\mathcal{F}(|\mathbf{x} - \mathbf{n}L|, h) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{n}L}{|\mathbf{x} - \mathbf{n}L|} \quad (3.12)$$

Ewald-összegzéssel [21; 35] lehet meghatározni, ahol L a periodikus doboz lineáris mérete és $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ végigmegy minden egész számhármason, elméletben a végtelenig. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy az erőszámításnál minden periodikus képet figyelembe veszünk. Természetesen nem lehet egy véges teljesítményű számítógéppel az összeget a végtelenig elvégezni, így \mathbf{n} -ben vágást kell alkalmazni. Leggyakrabban azokat a számhármasonokat vesszük figyelembe, amikre teljesül az $|\mathbf{x} - \mathbf{n}L| < 2,6 L$ összefüggés [35]. Az ehhez a két részecske között értelmezett erőtvörvényhez tartozó φ gravitációs potenciál a

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = 4\pi G \left[-\frac{1}{L^3} + \sum_{\mathbf{n}} \tilde{\delta}(\mathbf{x} - \mathbf{n}L) \right] \quad (3.13)$$

egyenlet megoldása, ahol $\tilde{\delta}(\mathbf{x})$ az egy részecskéhez tartozó simított sűrűségmező [74]. Jól láthatóan a potenciál, és így a Lagrange-függvény nem lesz invariáns tetszőleges tengely körüli tetszőleges nagyságú elforgatásra.

Ha a szimuláció célja a teljesítményspektrum meghatározása, akkor legegyszerűbb a részecskék tömegét azonosra állítani a

$$m_i = \frac{\rho_{crit} \cdot \Omega_m \cdot V_{sim}}{N} = \frac{3 \cdot H_0^2 \cdot \Omega_m}{8\pi G} \cdot \frac{V_{sim}}{N} \quad (3.14)$$

formulával, ahol N a részecskék száma, és V_{sim} a szimuláció térfogata. Ebben az esetben a szimuláció teljes térfogatában mindenhol állandó a felbontás.

Az erők számítása a legegyszerűbb algoritmusok esetén $\mathcal{O}(N^2)$ -el arányos, és ezekkel a mai processzorok (CPU) és általános célú grafikus kártyák (general-purpose processing unit - GPGPU, röviden GPU) mellett mellett legfeljebb néhány millió részecskével lehet szimulációt futtatni. A direkt erőszámításon túl természetesen léteznek gyorsabb algoritmusok is, mint például a Barnes-Hut fa [4] vagy a P³M [17] módszerek. Ezekre jellemző, hogy a futási idő $\mathcal{O}(N \log N)$ -el arányos, és akár $N = 8 \cdot 10^{12}$ is elérhető kellően nagy teljesítményű szuperszámítógép esetén [58].

3.2. Kezdeti feltételek

Az N-test szimulációk indításához szükséges, hogy rendelkezésre álljon a vizsgálni kívánt kozmológiával konzisztens kezdeti feltétel. Lineáris perturbációszámítással a teljesítményspektrum a 3.6 képlettel számítható addig, ameddig a nem lineáris tagok nem lesznek jelentősek, mivel ezek hatására a módusok már nem fejlődnek függetlenül. Ez különböző k hullámszámok esetén különböző vöröseltolódásokon történik meg. A kisebb skálákon időben hamarabb kezdődik a nem lineáris fejlődés, ezért a kezdeti feltétel térbeli felbontása határozza meg, hogy mekkora kezdeti vöröseltolódást érdemes használni. A kezdetifeltétel-generálás elsődleges célja, hogy a folytonos sűrűség- és sebességmezőt úgy helyettesítsük diszkrét részecskékkel, hogy megőrizzük az eredeti statisztikai tulajdonságait. Ez három fő lépésből áll: egy homogén sűrűségmezőnek megfelelő, struktúrától mentes részecskeeloszlás előállítása; ennek az eloszlásnak a megváltoztatása úgy, hogy az előírt sűrűségmezőnek feleljen meg; végül a részecskék sebességeinek beállítása [74].

Ha egy homogén sűrűségmező kezdetben nyugalomban van együttmozgó koordinátákban, akkor nem alakulnak ki struktúrák benne tetszőleges idő elteltével. Ez az állapot egy olyan diszkrét részecskeeloszlásnak feleltethető meg, ahol minden részecskére zérus gravitációs erő hat. Legegyszerűbben periodikus rácsokkal lehet ilyen eloszlást előállítani. Ennek hátránya, hogy a rács kitüntetett irányai jelentős anizotrópiát és mesterséges struktúrákat okozhatnak a

későbbi szimulációkban [82; 40]. Sokkal jobb megoldás az ú.n. gravitációs üvegek használata. Ezeket úgy állítják elő, hogy egy periodikus dobozba leszórnak N_{db} részecskét véletlenszerűen, majd ebből a kezdeti állapotból indítanak egy kozmológiai N-test szimulációt úgy, hogy a newtoni gravitációs állandót -1 -szeresére változtatják. Ilyen taszító gravitáció mellett a részecskék idővel egyre homogénebb eloszlást mutatnak, miközben Hubble fékeződés miatt folyamatosan veszítenek kinetikus energiájukból. Mire a tágulási faktor eléri a 10^6 értéket, a részecskék egy üveg-szerű állapotba rendeződnek, amiben nincsenek kitüntetett irányok, és minden részecskére zérus erő hat [86]. Jellemzően EdS háttéruniverzumot szokás használni egyszerűsége miatt. Egy adott nagyságú, N_{IC} részecskét tartalmazó kezdeti feltételhez elégséges egy kevesebb részecskét tartalmazó üveg generálása, majd ennek periodikus ismétlésével elérhető a szükséges részecskeszám. Ha tengelyenként N_{tile} -szor ismétljük meg az N_{glass} részecskét tartalmazó üveget, akkor ebből

$$N_{IC} = N_{tile}^3 N_{glass} \quad (3.15)$$

részecskés kezdeti feltételt állíthatunk elő. Mivel egy N_{glass} részecskés üveg generálása hozzávetőlegesen annyi időbe kerül mint egy ugyanennyi részecskét tartalmazó szimuláció lefuttatása, így ezzel a módszerrel jelentősen csökkenthető a kezdeti feltétel előállításához szükséges gépidő. Jellemzően N_{tile} értékét 2 és 4 közötti értékre állítják.

Miután sikerült valamilyen módszerrel előállítani a homogén részecskeeloszlást, a következő lépés az, hogy a részecskék sebességeit és pozícióit megváltoztatják úgy, hogy a belőlük számított korrelációs függvény és teljesítményspektrum várható értéke megegyezzen a perturbációs számításból kapottal. Ehhez első lépésben elő kell állítani a Fourier-térben a δ_k kezdeti sűrűségmezőt egy rácson numerikusan. Gaussi sűrűségmező esetén, minden k módusra ezt úgy kell megtenni, hogy δ_k amplitúdóját véletlenszerűen kell megválasztani a

$$P_R(\delta)d\delta = \frac{\delta}{\sigma^2} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta \quad (3.16)$$

Rayleigh eloszlásból, ahol $\sigma^2 = VP(k)/2$, továbbá fázist egyenletes eloszlásból generáljuk 0 és 2π között. Ezzel ekvivalens, ha δ_k valós és képzetes részét külön-külön Gauss eloszlásból generáljuk σ^2 szórással [74]. Természetesen k hullámszámok nem mennek el végtelenig: az

átlagos részecske szeparációból számított $k_{Ny} = \pi/\Delta x$ Nyquist-hullámszám természetes felső limitet ad a hullámszámra tengelyenként. Az ennél kisebb hullámhosszak csupán zajt adnának a későbbi szimulációkhoz, mivel ezek a módusok már nem bonthatók fel N -test módszerrel. Fontos megjegyezni, hogy mivel a $\delta(x)$ sűrűségmező valós, ezért δ_k -t úgy kell előállítani, hogy hermitikus függvény legyen.

A δ_k -ból egyszerű inverz háromdimenziós Fourier-transzformációval előállítható a kezdeti sűrűségmező, ami egy euleri rácson van értelmezve. A homogén eloszlású részecskék elmozdításához viszont lagrange-i reprezentációra van szükség. Ha z_{start} kezdeti vöröseltolódású a kezdeti feltétel, akkor az i -edik részecske helyvektora

$$\mathbf{x}_i(z_{\text{start}}) = \mathbf{x}_{i,0} + \Psi(\mathbf{x}_{i,0}, z_{\text{start}}), \quad (3.17)$$

ahol $\mathbf{x}_{i,0}$ a részecske koordinátája a homogén eloszlásban, és $\Psi(\mathbf{x}, z)$ az elmozdulásmező adott vöröseltolódáson. Az utóbbi Lagrange perturbációs módszerrel meghatározható. Az elmélet lényege, hogy a Ψ mezőt

$$\Psi(\mathbf{x}, z) = \Psi^{(1)}(\mathbf{x}, z) + \Psi^{(2)}(\mathbf{x}, z) + \Psi^{(3)}(\mathbf{x}, z) + \dots \quad (3.18)$$

alakban írja fel [92; 85], majd perturbációs módszerrel meghatározza a különböző rendekben az elmozdulásmezőt. Az elsőrendű megoldást Zeldovics-közelítésnek nevezzük [93]. Ez a következő alakban írható fel:

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{x}, z) = \int \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \delta(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{x}\mathbf{k}} \quad (3.19)$$

Szükséges a részecskék sebességét is beállítani, hogy konzisztens legyen a sűrűségmezővel. Ezt az alábbi képlettel adható meg:

$$\dot{\mathbf{x}}(z_{\text{start}}) = \frac{\dot{D}(a_{\text{start}})}{D(1)} \Psi(\mathbf{x}). \quad (3.20)$$

Látható, hogy egy adott részecske elmozdulása arányos a sűrűségmező gradiensevel, és ezzel párhuzamos a kezdeti sebességtér. A Zeldovics-közelítés kellően pontos eredményt ad $k = 1,0h/\text{Mpc}$ módusig, ha $z_{\text{start}} \geq 100$. Ha $\Psi^{(2)}$ -t is figyelembe vesszük, akkor másodrendű

Lagrange perturbációs módszerrel (2LPT) a $z_{\text{start}} \geq 50$ állapotra érdemes állítani a kezdeti feltételt [12]. A leggyakrabban használt kezdetifeltétel-generátor implementáció a Zeldovics-közelítéssel az *NgenIC*¹, míg 2LPT-vel a *2LPTic*².

3.3. Szimulációk kiértékelése

3.3.1. A korrelációs függvény és a teljesítményspektrum

Miután az adott kozmológiai paraméterekkel elő lett állítva a kezdeti feltétel, és lefutott az ebből indított szimuláció, a következő feladat a korrelációs függvény és a teljesítményspektrum meghatározása. Mivel a kettő között a 3.5 képlet ad kapcsolatot, így az egyik ismeretében azonnal kiszámítható a másik. Diszkrét részecskék esetén a korrelációs függvény megadja annak

$$P = \frac{N}{V} (1 + \xi(r_{1,2})) dV_1 dV_2 \quad (3.21)$$

valószínűségét, hogy az egymástól $r_{1,2}$ távolságban lévő dV_1 és dV_2 térfogatok mindegyikében van részecske. Így a legkönnyebben kivitelezhető megoldás az, ha az összes i, j részecskepárra az algoritmus meghatározza az $r_{i,j}$ távolságot, majd intervallumokra osztva $\xi(r)$ argumentumát előállítja a korrelációs függvényt [25]. Mivel ez a módszer végigmegy minden lehetséges részecskepáron, így $\mathcal{O}(N^2)$ -el lesz arányos a futási idő, tehát legfeljebb néhány millió részecskére alkalmazható.

A teljesítményspektrum közvetlenül kiszámítható $\mathcal{O}(N \log N)$ -el skálázó módszerrel. Ennek lényege, hogy valamilyen módszerrel első lépésben rekonstruálják a sűrűségmezőt egy N_{grid}^3 rácspontban a dobozon belül, majd a doboz periodicitását felhasználva térbeli diszkrét Fourier transzformációval meghatározzák a δ_k mezőt. Ezután a Fourier térben egyszerű összegzéssel előállítható $P(k)$ a 3.3 definíció felhasználásával [13; 44]. Itt fontos tudni, hogy milyen ablakfüggvénnyel képezzük le a részecskéket a rácspontokra, mivel a kapott teljesítményspektrum konvolválva lesz ennek az ablakfüggvénynek a Fourier transzformáltjával, így utolsó lépésben dekonvolválni kell a teljesítményspektrumot [13]. Leggyakrabban a NGP

¹ <https://www.h-its.org/2014/11/05/ngenic-code/>

² <https://cosmo.nyu.edu/roman/2LPT/>

(Nearest Grid Point), a CIC (Cloud In Cell) és a TSC (Triangular Shaped Cloud) módszereket használják a sűrűségmező előállítására. Mivel diszkrét részecskékből áll elő ebben az esetben a sűrűségmező, így a meghatározott teljesítményspektrumból le kell vonni a sörétzaj járulékát:

$$P(k) = \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle - \frac{V}{N}. \quad (3.22)$$

Adott k hullámszámon, Δk szélességű tartományon tekintett teljesítményspektrum gaussi hibája

$$\Delta P(k) = \sqrt{\frac{2}{\Delta N_m}} \left[P(k) + \frac{V}{N} \right], \quad (3.23)$$

ahol

$$\Delta N_m = \frac{V k^2 \Delta k}{(2\pi)^2} \quad (3.24)$$

a vizsgált tartományon lévő módusok száma [70].

3.3.2. A gömbi C_l teljesítményspektrum

A teljesítményspektrum kiszámítása periodikus szimulációk esetén viszonylag egyszerű, mivel itt a diszkrét Fourier-transzformáció illeszkedik a topológiához, és a dobozon belüli átlagsűrűség is egyértelműen meghatározott. Ez a helyzet nem áll fenn a mérések esetén, mivel a megfigyelhető univerzumban nem sikerült kimutatni a periodikus geometriát, továbbá a teljesítményspektrum meghatározása esetén figyelembe kell venni, hogy a felmérés milyen alakú ablakban történt és hogy mekkora az átlagsűrűség ezen az ablakon belül, sőt a vizsgált objektumok sűrűsége változhat ezen belül például a magnitúdólimit miatt. Mérések esetén minél távolabbi objektumokat vizsgálunk, annál régebbi állapotát látjuk az Univerzumnak, ezért a távolabbi struktúrák a mérésekben korábbi állapotokat tükröznek. További problémát jelent az is, hogy a megfigyelt égi koordinátákból és vöröseltolódásokból együttmozgó koordinátákat, amikből aztán előállítható a mért teljesítményspektrum, csak előzetesen feltételezett kozmológiai modell esetén lehet számítani.

Ezekre a problémákra kínál megoldást az adott vöröseltolódás-héjakra kiszámított $C_l(z)$ gömbi-teljesítményspektrumok. Ezek segítségével a modellek és a mérések úgy összehasonlíthatók, hogy nem kell semmilyen kozmológiát előzetesen feltételezni a mérésekhez [7]. Mivel

szimulációk esetén a 2.32 képlet alapján meghatározható az ehhez a vöröseltolódáshoz tartozó együttmozgó távolság, így adott $a = 1/(z + 1)$ skálafaktorhoz tartozó állapotból kivágható egy véges Δz vastagságú gömbhéj, amit meg lehet feleltetni egy felmérésből kivágott, ehhez a vöröseltolódáshoz tartozó égtérképhez. Adott z vöröseltolódás-héj, a gömbi koordinátákban értelmezett $\delta(z, \Delta z, \vartheta, \varphi)$ fluktuációmező gömbi harmonikusok szerinti kifejtése a következő:

$$\delta(z, \Delta z, \vartheta, \varphi) = \frac{\rho(z, \Delta z, \vartheta, \varphi)}{\bar{\rho}} - 1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm}(z, \Delta z) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (3.25)$$

ahol a_{lm} együtthatók meghatározhatók a

$$a_{lm}(z, \Delta z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \delta(z, \Delta z, \vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi \quad (3.26)$$

képlettel. Az együtthatók ismeretében egyszerűen a

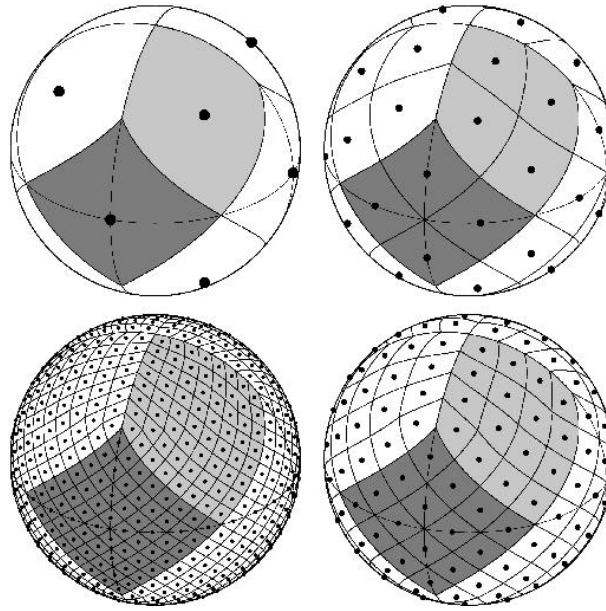
$$C_l(z, \Delta z) = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_{lm}(z, \Delta z)|^2 \quad (3.27)$$

összegzéssel előállítható a gömbi teljesítményspektrum.

A gyakorlatban az $a_{lm}(z, \Delta z)$ együtthatókat a HEALPix (Hierarchical, Equal Area, and iso-Latitude Pixelisation of the sphere - A gömb hierarchikus, egyenlő területű és azonos-szélességű pixelizálása) [29; 28] könyvtár `anafast` függvényével kerül kiszámításra numerikusan. Ez a módszer eredetileg a CMB kiértékeléséhez lett kifejlesztve, és lényege, hogy azonos területű cellákra képes osztani a gömböt, és ezen a pixelizáción igen gyorsan képes a gömbi harmonikusok szerinti kifejtésre. Az N_{side} paraméter meghatározza a pixelek számát a

$$N_{\text{pix}} = 12 \cdot N_{\text{side}}^2 \quad (3.28)$$

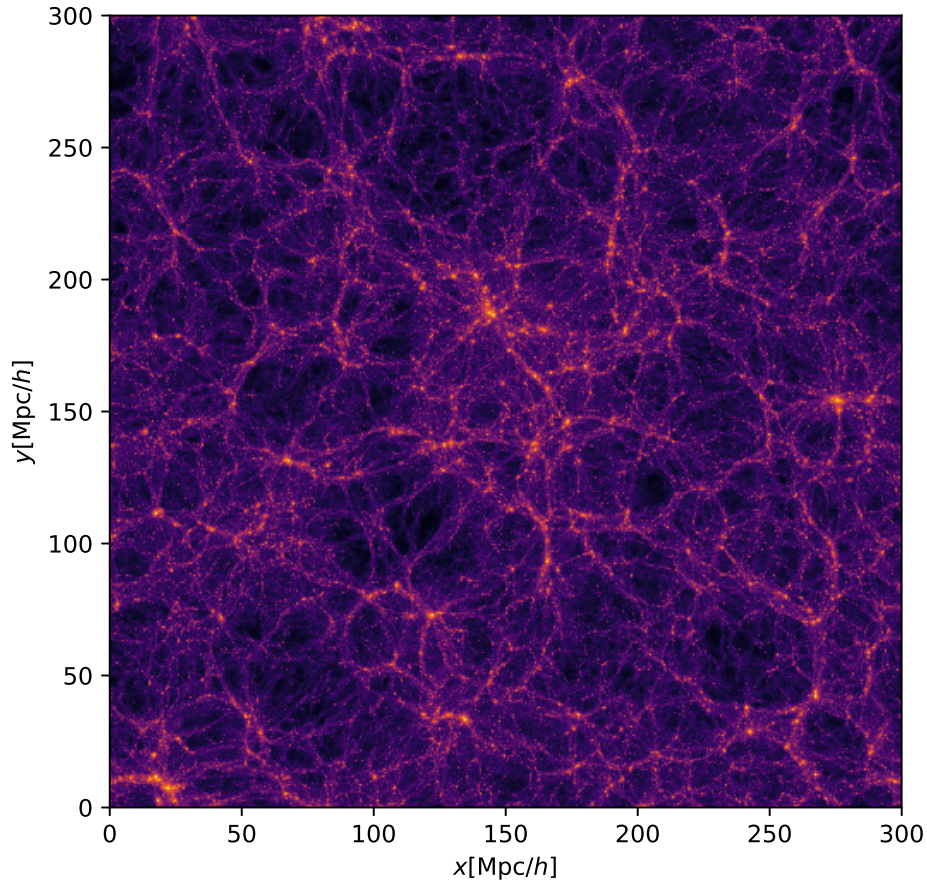
képleten keresztül. A 3.1 ábrán egy HEALPix felosztása látható a gömbnek.



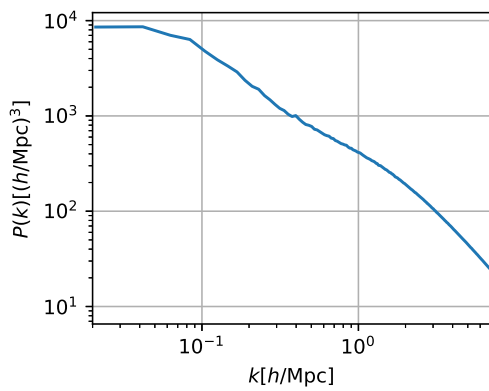
3.1. ábra. A HEALPix felosztása a gömbnek $N_{\text{side}} = 1; 2; 4; 8$ esetekben [29].

3.3.3. Haló-eloszlásfüggvények

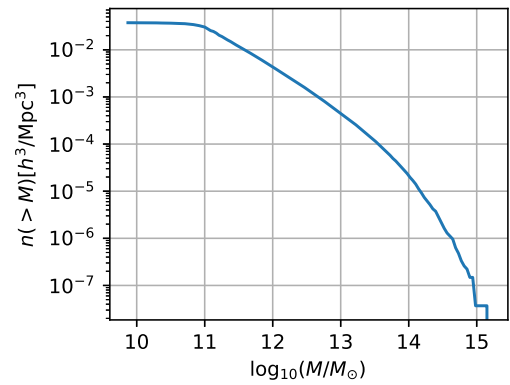
A nem lineáris struktúraképződés során csomósodások, úgynevezett halók alakulnak ki, melyekben az anyag virializálódik, és a részecskék véletlenszerű mozgása tart ellen a gravitációs vonzásnak. A sötét anyag ilyen csomósodásaiban indul meg a galaxisképződés, így a standard modell szerint minden galaxishoz tartoznia kell egy sötét anyag halónak. Így a halótömegeloszlás-függvény egy mérető mennyiség. A kialakuló halók tömegeloszlása függ a kozmológiai paramétereiktől, így használható ezen paraméterek meghatározására. A halótömegeloszlás-függvény megmutatja, hogy az adott tömegű sötét anyag halók milyen gyakoriak a vizsgált térfogatban. Ennek függvénynek a meghatározása nem egyértelmű feladat, mivel sok különböző definíció használatos az egy halóba tartozó részecskék azonosítására. Legáltalánosabban a Friends-of-Friends (FoF) algoritmusokat [38] használják erre a célra. A 3.2 ábrán látható egy általam futtatott periodikus kozmológiai szimuláció, az ebből számított teljesítményspektrum, és a halótömegeloszlás-függvény.



(a) Sűrűségmező egy szelete



(b) A számított teljesítményspektrum



(c) A sötétanyag-halók tömeg szerinti eloszlásfüggvénye

3.2. ábra. Egy $L_{\text{box}} = 300 \text{ Mpc}/h$ méretű periodikus szimuláció eredményei $z = 0$ állapotban. A kozmológiai paraméterek a standard Planck 2015 ΛCDM paraméterek voltak [56], és a részecskeszám $N = 3,43 \cdot 10^8$ volt. A szimulációt a *GADGET-2* kozmológiai N-test kóddal futtattam.

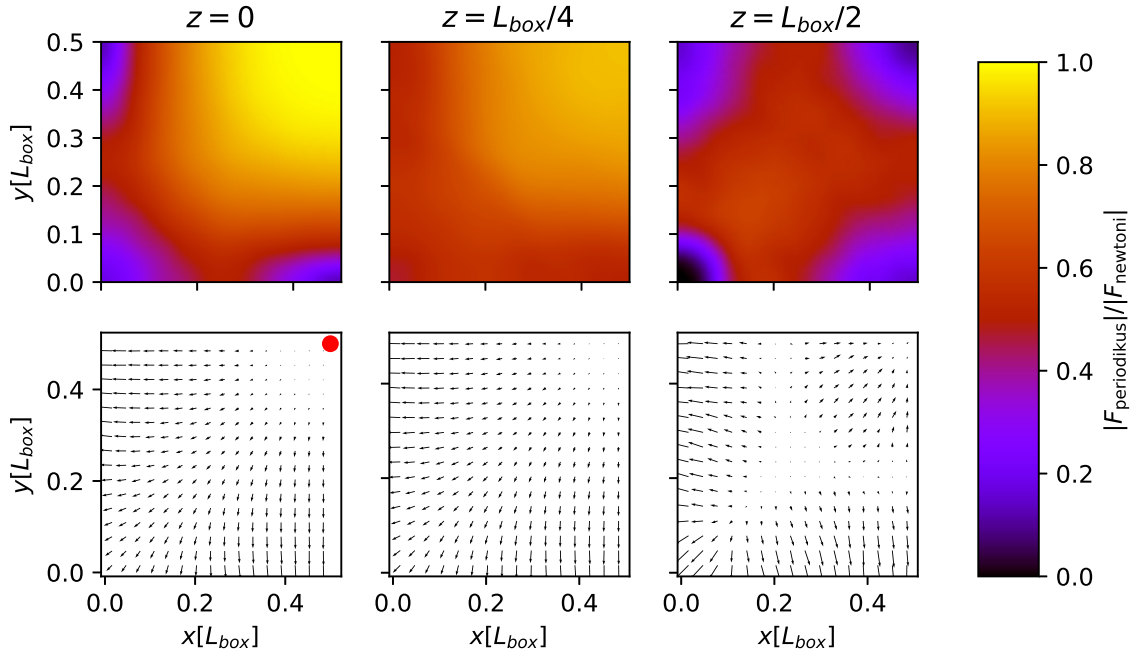
3.4. Vöröseltolódás-kúpok előállítása

A mérések során nem $z = 0$ állapotban látjuk az Univerzumot, hanem az egyre távolabbi térrészek egyre nagyobb vöröseltolódáson mutatkoznak a 2.32 képlet alapján. Így a nagyskálás felmérések és a szimulációk végállapotai nem hasonlíthatók össze közvetlenül. A szimulációkból elő kell állítani egy úgynevezett vöröseltolódás-kúpot, aminek a csúcsában a $z = 0$ állapot van, és innen távolodva adott irányban egyre nagyobb vöröseltolódású állapotok találhatók. Ezt hagyományos periodikus szimulációk esetén úgy állítják elő, hogy igen sűrűn írják ki külön fájlokba a részecskék adatait, majd a szimuláció lefutása után egyszerűen egymás mellé helyezik ezeket a kockákat, és ebből vágják ki az α nyílásszögű kúpot úgy, hogy a kúp iránya nem esik egybe a periodikus doboz egyik tengelyével sem, hogy elkerüljék a struktúrák periodikus ismétlését. Így minél kisebb a kúp nyílásszöge, annál nagyobb vöröseltolódásig lehet elmenni ismétlődés nélkül. Itt problémát okozhat az a tény, hogy egy kozmológiai szimulációban legalább száz millió részecske van, így minden egyes kiírt állapot akár több tíz vagy száz GB adatot is jelenthet. Egy jó felbontású vöröseltolódás-kúp előállításához több száz különböző vöröseltolódáson kell kimenteni a részecskék koordinátáit és sebességét, így igen hamar hatalmas mennyiségű adathordozóra lehet szükség.

3.5. Periodikus szimulációk anizotrópiájának vizsgálata

Newtoni közelítésben, két tömegpont között a gravitációs erő nagysága arányos a köztük lévő távolság reciprokanak négyzetével, és irányfüggetlen. Ez az alapvető összefüggés nem érvényesül periodikus szimulációkra. Két test közötti erő nagysága függ attól, hogy a tömegpontokat összekötő egyenes mekkora szöget zár be a doboz tengelyeivel. Extrém esetben, például ha mindkét tömegpont a doboz egyik tengelyén helyezkedik el, és távolságuk $L_{\text{box}}/2$, akkor a közöttük lévő erő zérus lesz, ami valódi newtoni gravitáció esetén lehetetlen [61]. Az eltérés a valódi newtoni gravitációs erőtvénnytől periodikus esetben a 3.3 ábrán látható.

Mivel az erő nem izotróp ebben az esetben, ezért a különböző irányokban különböző sebességgel növekednek a struktúrák. Hogy ezt bemutassam, szimulációk sorozatát futtattam a *GADGET-2* [76] kozmológiai szimulációs programmal. A 16db, standard Planck 2015 Λ CDM paraméterekkel rendelkező szimuláció mindegyike $2 \cdot 10^6$ részecskét tartalmazott,



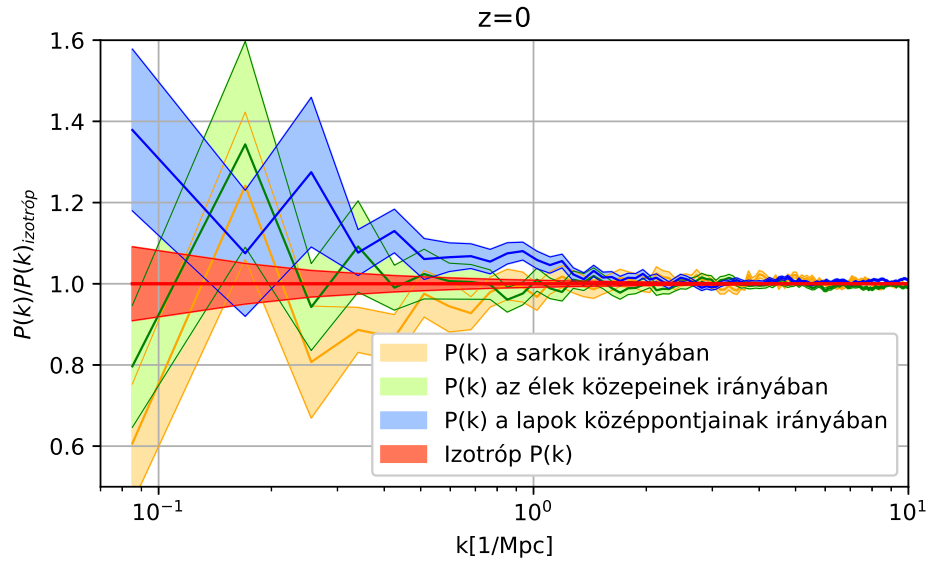
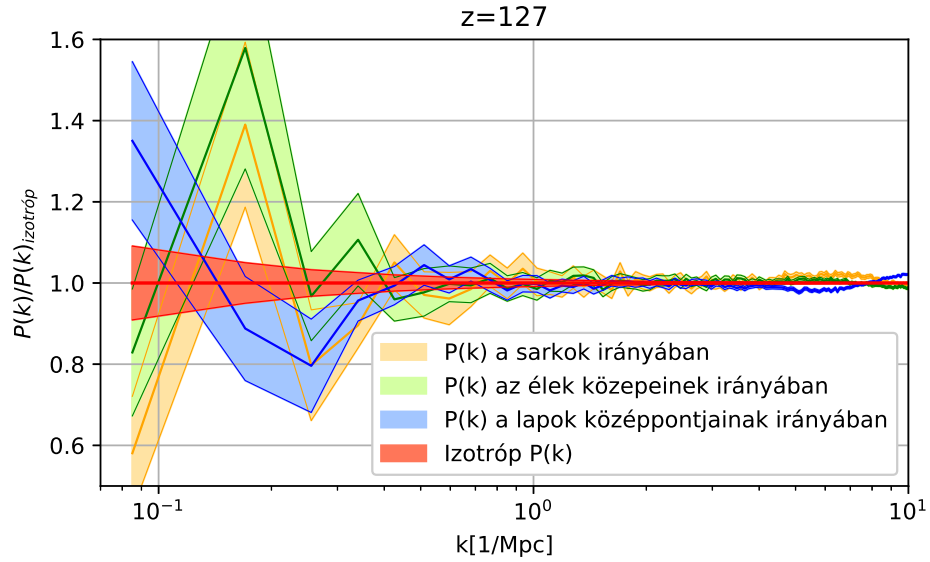
3.3. ábra. Egy L_{box} méretű periodikus dobozon belülre, az $(x, y, z) = (L_{\text{box}}/2, L_{\text{box}}/2, 0)$ koordinátákra helyezett tömegpont által keltett graviációs erőter és a valódi newtoni erőter közötti eltérés különböző z koordinátákhoz tartozó xy síkokban. Mindegyik ábrán az adott sík bal alsó negyedét ábrázoltam, és a periodikus erőket Ewald-összegzéssel határoztam meg. **Fent:** A periodikus és izotóp newtoni erők abszolút értékének $|\mathbf{F}_{\text{periodikus}}|/|\mathbf{F}_{\text{newtoni}}|$ hányadosa. **Lent:** $\mathbf{F}_{\text{periodikus}} - \mathbf{F}_{\text{newtoni}}$ különbségének az xy síkra vett vetülete. A nyilak hossza arányos az így számított vektormező az abszolút értékével.

és a periodikus doboz élhossza $50\text{Mpc}/h$ volt. Azért ezt a dobozméretet választottam, mivel ekkora és ennél kisebb periodikus szimulációkat széles körben használnak, ha igen nagy térbeli felbontás a cél; például az IllustrisTNG-50 szimulációk [55] élhossza csupán $35\text{Mpc}/h$ volt. A lefuttatott szimulációim között az egyetlen különbség annyi volt, hogy mindegyik kezdeti feltétel esetén mások voltak a felhasznált véletlen fázisok és amplitúdók. Miután lefuttattam a szimulációkat, a teljesítményspektrum számításánál nem összegeztem a k térben minden irányra, hanem a periodikus doboz által kijelölt kitüntetett irányok környezetében határoztam meg a spektrumot. Ezek az irányok a doboz sarkai, továbbá a lapjai és élei közepe felé mutató vektorok. Mivel így egy adott irány környezetébe mutató, k hullámszámhoz jóval kevesebb N_k módus tartozik mint izotóp átlagolás esetén, ezért össze kell átlagolni a szimulációkból kapott irányfüggő spektrumokat, hogy láthatóvá váljon a periodicitás által okozott torzítás. A számított irányfüggő spektrumok, és az egyik szimuláció végállapota a 3.4 ábrán látható. A

lapok középpontjainak irányában a teljesítményspektrum a $0,1h/\text{Mpc} < k < 1,0h/\text{Mpc}$ tartományon szignifikánsan, $\approx 6\%$ -al nagyobb volt, mint az átlagos izotróp teljesítményspektrum. Ezt a kiértékelést elvégeztem a $z = 127$ vöröseltolódású kezdeti feltételre is, és itt nem volt tapasztalható szignifikáns irányfüggés a teljesítményspektrumban. Kijelenthető tehát, hogy a teljesítményspektrum a lapokkal párhuzamos irányokban gyorsabban növekedik, mint az átlagos spektrum, és ez az eltérő fejlődés a szimuláció során alakul így az anizotróp erők hatására.

A valódi Univerzumban minden hullámszámú sűrűségfluktuációk előfordulnak, és ezek amplitúdóját a teljesítményspektrum határozza meg. Periodikus szimulációk esetén csak azok a módusok modellezhetők, amelyek hullámhossza belefér a dobozba. Tehát a periodikus szimulációk esetén csak a $k \leq k_{max} = 2\pi/L_{box}$ hullámszámokhoz tartozó amplitúdók vehetnek fel véges értéket, a k_{max} -nál kisebb hullámszámokhoz tartozó amplitúdók értéke automatikusan nulla lesz, az átlagos sűrűséget leíró $k = 0$ módus kivételével. Mivel a módusok a nemlineáris korszakban csatoltan fejlődnek, ezért ha egy szimulációban ezeket nem vesszük figyelembe, akkor azok hibákat okozhatnak a kisebb, a már szimulált skálákon is [1]. Ez a probléma úgy is megfogalmazható, hogy egy L_{box} élhosszal rendelkező periodikus szimuláció esetén az Univerzumnak egy olyan L_{box}^3 térfogatú részét modellezzük, aminek az átlagsűrűsége megegyezik a teljes Univerzum átlagsűrűségével, és a térfogaton kívülről ható árapály erők nem tartalmazzák a L_{box} hullámhossznál nagyobb struktúrákból eredő járulékot. A valóságban ilyen térfogatokat nem tudunk megfigyelni, így a nagyskálás felmérések korrekt modellezéséhez igen nagy L_{box} dobozmérettel kell szimulációkat futtatni, majd ezekből kivágni a felméréseknek megfelelő térfogatokat.

A harmadik lehetséges probléma a periodikus szimulációkkal az, hogy a tömegpontok mozgását leíró Lagrange-függvény nem invariáns az elforgatásra, így ezekben a szimulációkban az impulzusmomentum nem megmaradó mennyiség.



3.4. ábra. Periodikus szimulációkból számolt irányfüggő teljesítményspektrum és az izotróp, teljes hullámszám-térre vonatkozó spektrum hányadosa 16 szimulációból átlagolva. A szimulációk egyedül a kezdeti feltételben beállított véletlen amplitúdókban és fázisokban tértek el egymástól. A periodikus doboz lineáris mérete $L_{\text{box}} = 50 \text{ Mpc}/h$, a részecskeszám $N = 2 \cdot 10^6$ volt, és a kozmológiai paraméterek a Planck 2015 ΛCDM paraméterek voltak.

4. fejezet

Kozmológiai szimulációk kompaktifikált geometriában

4.1. A sztereografikus projekció

A hagyományos kozmológiai N -test szimulációk azért alkalmaznak periodikus határfeltételt, mert így véges térfogatban, állandó tömegfelbontás mellett modellezhető véges részecskeszámmal a struktúraképződés. Ezt a határfeltételt alkalmazza minden, ma használt nagy kozmológiai struktúraképződést vizsgáló szimuláció. Lehetséges azonban úgy is kozmológiai szimulációt futtatni véges számú részecskével, hogy a szimulált térfogat végtelen nagy. Ezt természetesen csak úgy lehet megtenni, ha a szimulációban nem állandó a felbontás minden pontban. Ahhoz hogy végtelen térfogatban lehessen szimulálni, kompaktifikálni kell a vizsgált Univerzumot, vagyis az összes lehetséges $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koordinátát bijektív módon le kell képezni egy véges kompakt térre. A legismertebb ilyen transzformáció az inverz sztereografikus projekció. A következő pontokban áttekintem az egy-, két-, és háromdimenziós esetben ezt a leképezést.

4.1.1. Egydimenziós eset

Egy dimenzióban a sztereografikus projekció egy \mathcal{S} kört képez le egy \mathcal{P} egyenesre. Legyen R_S a kör sugara, T a talppont ahol a kör és az egyenes érintkezik, és O a kör középpontja.

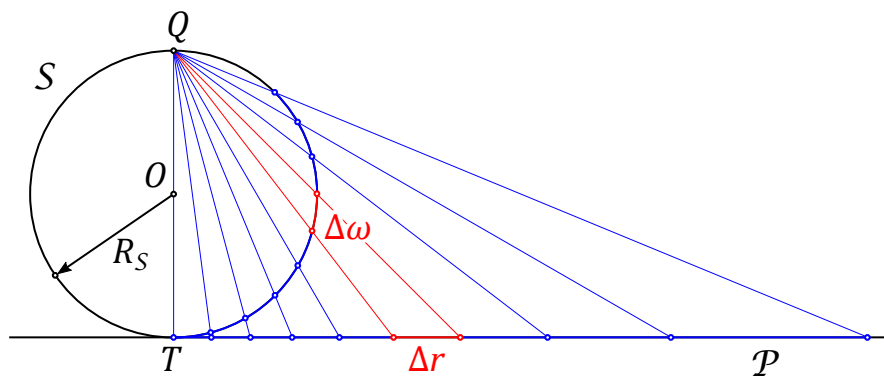
Az OT egyenes a talppontban és a Q projekciós pontban metszi a kört. A körön értelmezett Ω pontot a az egyenesre úgy képezzük le, hogy első lépésben egy egyenessel összekötjük Ω -t a Q ponttal. A $Q\Omega$ egyenes és a \mathcal{P} egyenest az R pontban metszi. Ez az R pont az Ω pont a \mathcal{P} egyenesen értelmezett képe. Ha az ω a körön értelmezett Ω -hoz tartozó szögkoordináta, akkor az egyenesen R -hez tartozó koordináta

$$r = 2R_S \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (4.1)$$

Az inverz transzformáció egyszerűen

$$\omega = 2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{2R_S}\right) \quad (4.2)$$

alakban írható fel. A transzformáció a 4.1 ábrán tekinthető meg. Látható, hogy a $(-\infty, +\infty)$ tartományon értelmezett r koordinátát egy véges $[-\pi, \pi]$ tartományra képezi ez a transzformáció, úgy hogy a kör északi pólusa felel meg a talpponttól vett végtelen távolságnak az egyenesen.



4.1. ábra. Az egydimenziós sztereografikus projekció.

Egyértelmű, hogy ha a kompakt teret egyforma hosszú, $\Delta\omega$ szakaszokra osztjuk, akkor az ezekhez tartozó Δr szakaszok az egyenesen nem lesznek egyforma nagyságúak: a talpponttól távolodva egyre nagyobbak lesznek, míg a negatív illetve a pozitív végtelenek irányába az utolsó szakaszok végtelen nagyságúak lesznek.

4.1.2. Két- és háromdimenziós eset

A kétdimenziós eset a 4.2 ábrán látható. Ekkor a projekció egy \mathcal{S} gömbről képezi le a pontokat egy \mathcal{P} síkra. Hasonlóan az egydimenziós esethez, itt a T talppontban érintkezik a gömb a síkkal, és a TO egyenes metszi ki a Q vetítési pontot a gömb északi pólusán. A gömb felszínén értelmezett Ω ponthoz tartozó X pont a $Q\Omega$ egyenes és a sík metszéspontja. Az Ω ponthoz tartozó gömbi (ω, φ) koordináták képei a síkon egy T origójú polárkoordináta-rendszerben (r, φ) , ahol r a 4.1 képlettel számítható, tehát a kétdimenziós sztereografikus projekció valójában csak a sugár irányú koordináta transzformációja.

Hasonló a helyzet három dimenzió esetén: itt a transzformáció egy négydimenziós hiper-gömb háromdimenziós felülete és egy sík háromdimenziós tér között történik, és a transzformáció sugár irányú dekompatifikációt jelent. Ha a gömbfelületen a gömbi koordináták $(\omega, \vartheta, \varphi)$, és a nem kompakt térbeli Descartes koordináták (x, y, z) , akkor a transzformáció

$$\begin{aligned} x &= 2R_s \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y &= 2R_s \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ z &= 2R_s \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos(\vartheta) \end{aligned} \quad (4.3)$$

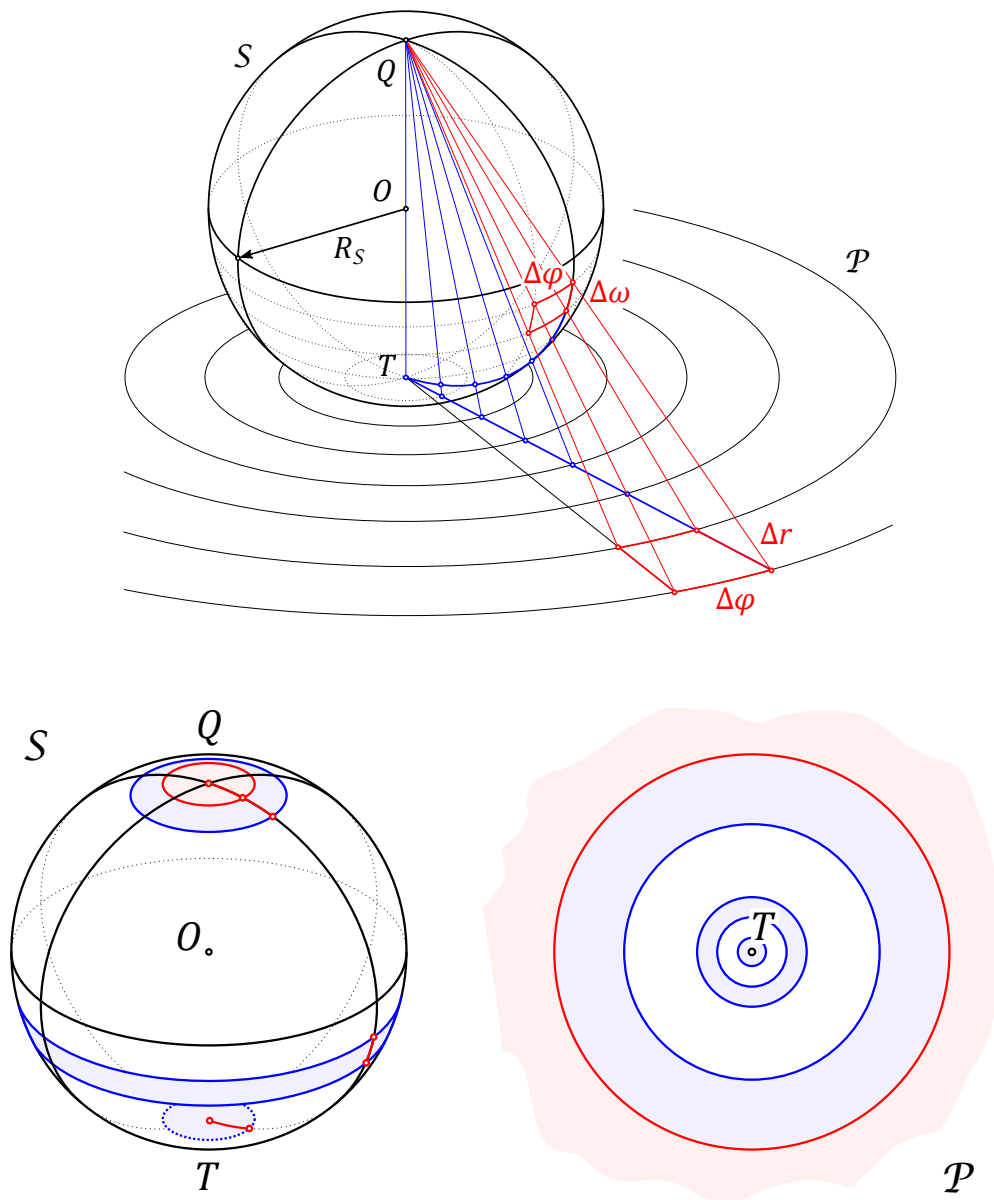
alakú, míg az inverzek

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2R_s}\right) \\ \vartheta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

alakban írhatók fel.

4.2. A mozgásegyenletek

A StePS kozmológiai szimulációs algoritmus alapja az, hogy a vizsgált Univerzumot leképezzük egy kompakt négydimenziós gömb háromdimenziós hiperfelületére, és a kompakt



4.2. ábra. A kétdimenziós sztereografikus projekció. **Felül:** Egy (ω, φ) koordinátájú, $\Delta\omega\Delta\varphi$ nagyságú terület leképezése a kompakt térről a síkra. **Alul:** A kompakt gömbön értelmezett tartományok a síkra leképezve. A Q vetítési pont körüli véges nagyságú vörös tartományhoz a nem kompakt térben egy végtelen nagy külső tartomány tartozik.

térben, kezdetben egyenletes felbontás mellett szimuláljuk a struktúraképződést. Ez úgy történik, hogy egyenletesen felosztjuk a kompakt teret, és minden ilyen cellában egy részecskével mintavételezzük a sűrűség- és sebességmezőt. Természetesen ez azt jelenti, hogy a valódi, nem kompakt térben, a T talpponttól távolodva a szimuláció kezdeti térbeli felbontása csökken. Adott projekció és kompakt térbeli felbontás mellett mindig választható egy olyan ω_{\max}

érték, hogy az ehhez tartozó $\omega > \omega_{max}$ tartományon már olyan kicsi a valódi térbeli felbontás, hogy a kozmológiai elvet felhasználva itt már homogénnek tekinthető a sűrűségmező. Ehhez az ω_{max} -hoz tartozó valódi térbeli

$$R_{sim} = 2R_S \tan\left(\frac{\omega_{max}}{2}\right) \quad (4.5)$$

sugarat nevezik a szimuláció sugarának, és az ezen belüli térfogatot a szimuláció térfogatának. Látható, hogy egy ilyen geometriájú szimuláció invariáns tetszőleges tengely körüli tetszőleges nagyságú forgatásra, és mentes a periodikus határfeltételtől. Ezzel a módszerrel így egy végtelen Univerzum szimulálható véges számú részecskével periodikus határfeltétel nélkül, úgy hogy a T ponttól kellően nagy távolságra lévő térrészeket homogénnek tekintjük. A T pontot nevezzük a szimuláció középpontjának.

A kompakt térben egyenletesen mintavételezett sötétanyag-eloszlás vizsgálatához fel kell írni a részecskék mozgásegyenleteit ilyen geometria mellett. A konkrét mozgásegyenletek felírhatók mind a kompakt mind a valódi térben. A kompakt térbeli mozgásegyenletek megkaphatók a valódi térbeli mozgásegyenletekből $r \rightarrow \omega$ koordinátatranszformációval, gömbi koordináták esetén. Ha a valódi térben Descartes koordinátákban vannak megadva a részecskék pozíciói, akkor a 4.4 képlet felhasználásával számíthatók át az egyenletek. Mivel ugyanazokról az egyenletekről van szó más koordinátákban, célszerű azokat használni, melyek esetén az erőszámítás a legkevesebb lebegőpontos művelettel jár. A továbbiakban valódi tértbeli Descartes koordinátákat használunk, mivel ezekben a leggyorsabb a távolságok kiszámítása.

A StePS szimulációkat lehetséges együttmozgó, és nem együttmozgó koordinátákban futtatni.

4.2.1. Együttmozgó koordinátákban

Hubble-áramlással együtt mozgó koordináták esetén, a periodikus esetben bemutatott 3.9 mozgásegyenletek érvényesek. Egzakt homogén sűrűség mellett minden részecskére zérus erő hat, így koordinátáik állandók maradnak időben, mivel a tágulást itt az időben változó

$a(t)$ skálafaktor tartalmazza. StePS szimulációk esetén az R_{sim} sugáron belül a részecskék között ható erő valódi newtoni gravitáció valamilyen rövidtávú simítással. Belátható, hogy ha az R_{sim} -en túli térrészekből eredő erőt nem vesszük figyelembe, akkor a gravitáció hatására egzakt homogén esetben is idővel a T pontba esne bele a szimulált térfogat. A Newton-féle héjtétel segítségével könnyen meghatározható a szimulációs térfogaton kívüli térrész hatása a szimulált részecskékre.

Legyen \mathbf{X}_i az i -edik részecske koordinátája, r_i a T talppont és \mathbf{X}_i közötti távolság! Jelölje \mathcal{K} az R_{sim} -en kívüli, \mathcal{I}_i a $0 < r < r_i$ tartományhoz, és \mathcal{U}_i $r_i < r < R_{sim}$ sugártartományhoz tartozó térfogatot! Legyen továbbá \mathcal{C}_i az \mathbf{X}_i középpontú $R_{sim} + r_i$ gömbön belüli térfogat. Tehát \mathcal{C}_i az a minimális sugarú gömb, ami tartalmazza a teljes szimulációs térfogatot. Mivel \mathcal{K} homogén, ezért a $\mathcal{K} \setminus \mathcal{C}_i$ -ből eredő erő zérus, tehát a továbbiakban elég \mathcal{C}_i -n belüli térfogatokkal foglalkozni. A szimuláción belülről ható erő $\mathcal{U}_i \cup \mathcal{I}_i$ tartományból érkezik, és ezt N-test módszerrel határozzuk meg a szimuláció során. A másik térfogat, ahonnan nem zérus erő ered nyilván a $\mathcal{C}'_i = \mathcal{C}_i \setminus (\mathcal{U}_i \cup \mathcal{I}_i)$. Az ebből a térfogataból eredő erő mindig sugárirányú, és csak r_i -től függ a nagysága. Mivel ezen térfogaton belül homogén az eloszlás, ezért analitikusan kiintegrálható az ebből eredő erő. A bonyolult integrál elvégzése nélkül is kiszámítható ez az erő, csupán rövid időre feltételezni kell, hogy $\mathcal{U}_i \cup \mathcal{I}_i$ -ban homogenitás van. Ekkor a Newton héjtételéből következik, hogy az \mathcal{U}_i -beli erő zérus. Mivel homogén esetben a részecskére ható erő zérus, így a \mathcal{I}_i és \mathcal{C}'_i térfogatokból ugyanakkora nagyságú, de ellentétes irányú erő hat az i -edik részecskére. Newton héjtétele szerint az \mathcal{I}_i gravitációs vonzása helyettesíthető a középpontjába helyezett ugyanakkora tömegű ponttömeg gravitációs vonzásával. Így a \mathcal{C}'_i -ből eredő erő

$$\mathbf{F}_{\mathcal{C}'_i} = -\mathbf{F}_{\mathcal{I}_i} = Gm_i 4\pi \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|} \int_0^{r_i} r^2 \bar{\rho} dr = \frac{4\pi G m_i}{3} \bar{\rho} \mathbf{x}_i, \quad (4.6)$$

alakban írható fel, ahol $\bar{\rho}$ a szimulált univerzum átlagos sűrűsége, és m_i a részecske tömege. Mivel a külső \mathcal{C}'_i tartomány a szimulációk során mindig homogén, ezért ez az erő inhomogén esetben is változatlan marad. A 4.3 ábrán látható a fenti számításokban használt térfogatok elhelyezkedése kozmológiai szimuláció esetén. Ezzel a külső erővel már felírhatók az együttmozgó mozgásegyenletek StePS szimulációk esetén. Feltételezve, hogy a koordinátarendszer

középpontja megegyezik a szimuláció középpontjával:

$$m_i \cdot \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^N \frac{m_i \cdot m_j \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h_i + h_j)}{a(t)^3} - 2 \cdot m_i \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i + m_i \cdot \frac{4\pi G}{3} \bar{\rho} \mathbf{x}_i, \quad (4.7)$$

ahol $\mathbf{F}(\mathbf{x}, h)$ az 3.10 egyenlettel számítható, és a megfelelően simított részecskék között ható valódi newtoni gravitációs erőtvénnyt adja meg. A h_i simítási hossz megválasztásánál tekintetbe kell venni a részecskék tömegét, mivel egy nagyobb tömegű részecske nagyobb térfogatot is reprezentál. Célszerű a legkisebb m_{\min} tömegű részecske h_{\min} simítási hosszát előre meghatározni, majd ebből számítható minden részecskére a

$$h_i = \sqrt[3]{\frac{m_i}{m_{\min}}} \cdot h_{\min} \quad (4.8)$$

hossz. Ezzel a választással biztosítjuk, hogy minden részecske körüli h_i sugáron belül ugyanakkora lesz az átlagsűrűség.

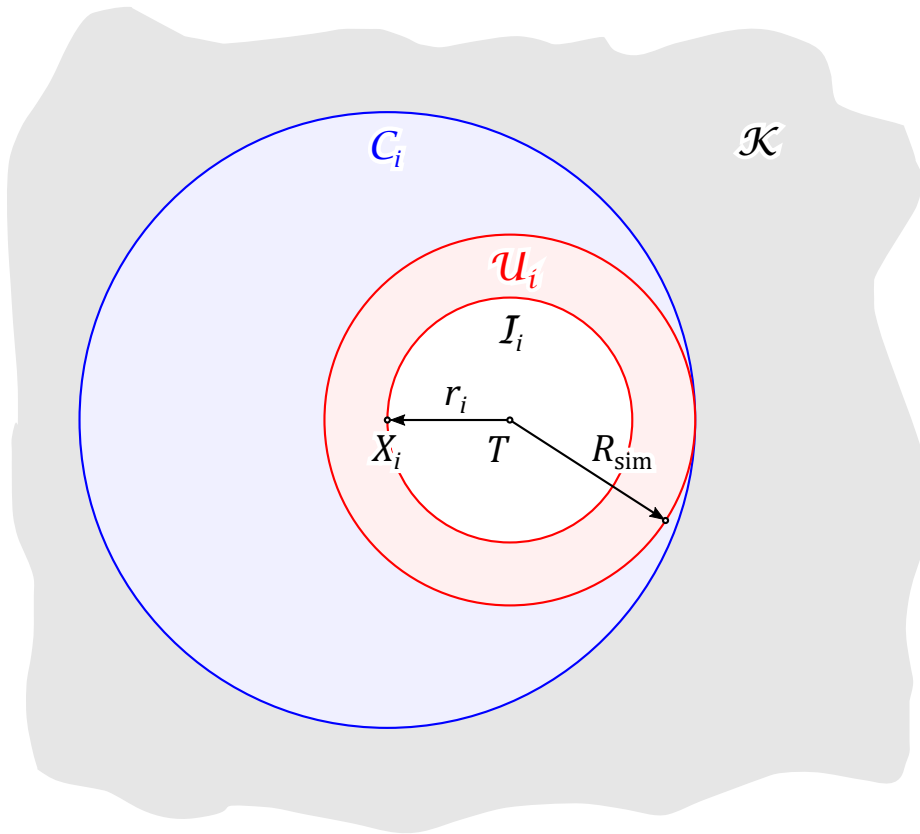
4.2.2. Nem együttmozgó koordinátákban

Ellentétben a hagyományos periodikus szimulációkkal, a StePS szimulációk futtathatók statikus koordinátákban is. Ez esetben a szimuláció teljesen newtoni, nem alkalmazza a koordináták és sebességek külső skálafaktorral és Hubble-paraméterrel történő átskálázását, így a részecskék egymással való kölcsönhatása határozza meg a tágulás dinamikáját. Az együttmozgó koordinátákról statikus koordinátákra adott a skálafaktor esetén a

$$\mathbf{X}_i = a \mathbf{x}_i \quad (4.9)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \frac{\dot{a}}{a} \cdot \mathbf{X}_i + \dot{\mathbf{x}}_i, \quad (4.10)$$

transzformációval lehet átállni, ahol \mathbf{X}_i a nem együtt mozgó, míg \mathbf{x}_i az együttmozgó koordinátája az i részecskének. Itt első lépésben a transzformáció egyszerűen átskálázza a szimulációt, majd hozzáadja a Hubble-áramlást a sebességekhez. Ha a cél az, hogy statikus koordinátákban fusson egy szimuláció és a kezdeti feltétel együttmozgó koordinátában van megadva, akkor ezt a transzformációt kell végrehajtani a szimuláció kezdetén. Ilyen koordinátákban, homogén



4.3. ábra. A külső, nem szimulált térfogattól eredő erő számítása az i részecskére együttmozgó koordináták esetén. Lásd a szöveget a részletes leírásért.

esetben sem állandók a részecskék pozíciói: ekkor tökéletesen követik a Hubble-áramlást. Ez az áramlás sugárirányú, és a gömbszimmetrikus anyageloszlás saját gravitációja fékezi a tágulást. Ebben az esetben az előző pontban bemutatott \mathcal{C}'_i tartományból eredő erő zérus lesz, és nem kell figyelembe venni. Ha $\Omega_\Lambda = 0$, és a sugárzás hatását elhanyagoljuk, akkor a mozgásegyenletek az egyszerű, szabad határfeltétellel rendelkező

$$m_i \cdot \ddot{\mathbf{X}}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^N m_i m_j \mathbf{F}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j, h_i + h_j) \quad (4.11)$$

Newton-egyenletek lesznek, ahol $\mathbf{F}(\mathbf{X}, h)$ az 3.10 egyenlettel számítható, és csak a simításban tér el a newtoni gravitációtól az együttmozgó esethez hasonlóan. Mivel a gravitációs kollapszusnak newtoni esetben csak egzakt gömbszimmetrikus homogén esetre ismert analitikus megoldása, egy ilyen szimulációval vizsgálható a nemlineáris fejlődés során kialakuló struktúrák visszahatása a tágulás dinamikájára.

Ha $\Omega_\Lambda \neq 0$, akkor figyelembe kell venni a hatását. Korábban bemutattam, hogy a Λ kozmológiai állandó hatására az Univerzum skálaparamétere $a \propto e^{H_0 t}$ módon változik, a késői időkben, amikor már a többi kozmológiai paraméter hatása elhanyagolható. Statikus koordináták esetén ez azt jelenti, hogy a részecskék radiális sebessége idővel exponenciális ütemben fog nőni. Ahhoz hogy ezt a feltételt teljesítsék a nem együttmozgó koordinátákban futtatott szimulációk, egy radiális, $H_0^2 \Omega_\Lambda$ -val arányos erőt kell hozzáadni. Így a mozgásegyenletek kozmológiai állandó jelenlétében a következőképpen módosulnak:

$$m_i \cdot \ddot{\mathbf{X}}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^N m_i m_j \mathbf{F}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j, h_i + h_j) + H_0^2 \Omega_\Lambda \cdot m_i \cdot \mathbf{X}_i. \quad (4.12)$$

Mind együttmozgó, mint statikus koordinátákban a mozgásegyenleteket numerikusan kell integrálni.

4.3. Vöröseltolódás-kúpok előállítása

A StePS szimulációs algoritmussal igen egyszerűen állítható elő vöröseltolódás-kúp egy nézőpontból. Mivel a szimuláció gömbszimmetrikus, és nincsenek ismétlődő struktúrák, ezért a teljes éggömbre kiszámítható a vöröseltolódás-kúp. Ekkor a szimuláció középpontjába kell helyezni a megfigyelt, így a közeli, alacsony vöröseltolódású objektumok jó felbontáson, míg a távoliak alacsonyabb felbontáson lesznek elérhetők. Az adatsor előállítása során a 2.32 egyenletet felhasználva minden egyes lépés után ellenőrizzük, hogy van-e olyan gömbhéj, aminek a szimuláció középpontjától számított együttmozgó távolsága a jelenlegi vöröseltolódáshoz tartozik. Ha a program talál ilyet, akkor ezeket a részecskéket kiírja. Természetesen ha egy részecskét kiírtunk a vöröseltolódás-kúp fájlba, akkor többet nem kerül kiírásra, hogy megakadályozzuk hogy a részecskék mozgása miatt többször is ugyanazt írjuk ki. Az utolsó lépésében kiíródnak a megfigyelőhöz legközelebbi részecskék is, így a szimuláció végére automatikusan előáll a vöröseltolódás-kúp. Az így kapott kúpban az egyre távolabbi struktúrák egyre korábbi állapotát mutatják a megfigyelt univerzumnak, akárcsak a valódi megfigyelések esetén. StePS szimulációkban sugár irányban kifelé haladva egyre nagyobb tömegpontok reprezentálják az anyageloszlást, ami szintén igaz a megfigyelések esetén, mert távol csak a legnagyobb galaxi-

sokat és halmazokat látjuk. A kiírt i indexű részecske esetén a látóirányú sebességéből eredő $z_{\text{pec},i}$ Doppler-vöröseltolódáshoz hozzá kell adni az együttmozgó távolságából számított $z_{\text{cosmo},i}$ kozmológiai vöröseltolódást, hogy a mérhető

$$z_i = z_{\text{cosmo},i} + z_{\text{pec},i} \quad (4.13)$$

vöröseltolódást megkapjuk. Az így előállított kúpok tartalmaznak minden vöröseltolódás-térbeli, torzítást, amit a megfigyelések is tartalmazhatnak, és azonos módszerekkel értékelhetők ki, mint a valódi mérések.

A StePS szimulációkból így kapott kúpokat fel lehet osztani térszögben tetszőlegesen kisebb részekre, és így modellezhetővé válnak a különböző geometriájú megfigyelések. Több ilyen kúp kiértékelése után megbecsülhető belőlük egy adott mérés bizonytalansága.

4.4. Kezdeti feltételek generálása

StePS szimuláció futtatása előtt is szükséges olyan kezdeti feltétel előállítása, aminek a statisztikai tulajdonságai megegyeznek a lineáris perturbációszámításból kapottal, adott z_{start} kezdeti vöröseltolódáson. Erre két különböző módszert dolgoztam ki, melyek mindegyike a periodikus szimulációknál bemutatott módszeren alapszik. Itt bemutatom a két módszert, majd a 6.1 fejezetben összehasonlítom az ezekből indított szimulációk végeredményeit, és az esetlegesen előforduló mesterséges műtermékeket, amiket a különböző módszerek okozhatnak.

4.4.1. Kompaktifikációs módszer

Egy, már meglévő periodikus, állandó felbontású kezdeti feltétel felhasználásával előállítható StePS kezdeti feltétel. Ennek a módszernek az első lépése során ki kell választani a periodikus térfogatból a lefuttatandó StePS szimuláció középpontját. Legyen ennek a pontnak a dobozbeli együttmozgó koordinátája $\mathbf{C}_{\text{VOI}} = (x_{\text{VOI}}, y_{\text{VOI}}, z_{\text{VOI}})$. Ez a pont szabadon megválasztható, és kiválasztása függ attól, hogy mi a későbbi StePS szimuláció célja. Például ha különleges struktúrákat keresünk, akkor célszerű egy előzetes, alacsony felbontású periodikus szimulációt lefuttatni, majd ebben kiválasztani az érdekes térfogatosokat, például egy szuperhalmazt vagy üreget.

Ha az átlagos fejlődés vizsgálata a cél, akkor érdemes egy átlagos sűrűségű térfogat közepét kiválasztani a kezdeti feltételben. Miután a C_{VOI} kiválasztásra került, a kezdeti koordinátákból ki kell vonni ezt a vektort a periodikus határfeltétel figyelembevételével, így a koordináta-rendszer origójába kerül a kiválasztott térfogat. Mivel tipikusan egy StePS szimuláció sokkal nagyobb térfogatban történik, mint egy hagyományos periodikus, ezért előfordulhat, hogy a periodikus kezdeti feltétel lineáris mérete kisebb mint a tervezett StePS szimuláció átmérője, azaz $L_{\text{box}} < 2 \cdot R_{\text{sim}}$, akkor minden részecskéhez figyelembe kell venni az összes a periodikus képeiket, amikre teljesül, hogy

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{n}L_{\text{box}}| < R_{\text{sim}}, \quad (4.14)$$

hasonlóan, mint a 3.12 Ewald-összegzés esetén. Természetesen az is lehetséges, hogy eleve akkora periodikus kezdeti feltételünk van, hogy nem szükséges a részecskék periodikus képének figyelembevétele. Ekkor elég azokat a részecskéket figyelembe venni, amikre teljesül a

$$|\mathbf{x}_i| < R_{\text{sim}} \quad (4.15)$$

feltétel.

Az így kiválasztott koordinátákat leképezzük egy előre megválasztott, R_s sugarú négydimenziós gömb háromdimenziós kompakt felületére a 4.4 inverz projekciós képletekkel. Ezt a háromdimenziós hiperfelületet egyenlő nagyságú cellákra kell osztani, és az azonos cellába eső részecskéket helyettesíteni kell egy részecskével úgy, hogy az új részecske tömege

$$m_k = \sum_{i=1}^{N_k} m_i, \quad (4.16)$$

koordinátái

$$\mathbf{x}_k = \frac{1}{m_k} \sum_{i=1}^{N_k} m_i \cdot \mathbf{x}_i, \quad (4.17)$$

míg sebessége

$$\mathbf{v}_k = \frac{1}{m_k} \sum_{i=1}^{N_k} m_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (4.18)$$

lesz, ahol N_k a k cellában lévő részecskék száma, m_i , \mathbf{x}_i , és \mathbf{v}_i rendre a cellában lévő részecskék

tömegei, koordinátái és sebességei. Így a cellánként kapott egy új részecske tömege és impulzusa meg fog egyezni az eredeti részecskék tömegeinek és impulzusainak összegével, míg a koordinátája az eredeti részecskék tömegközéppontja lesz.

A kompakt térben történő felosztás ω irányban egyenletes ennél a módszernél. A radiális felosztásból kapott gömbhéjak felosztása több módszerrel is megvalósítható. A legegyszerűbb, ha a gömbön a jól ismert HEALPix felosztást használjuk. Ez $N_{\text{pix}} = 12 \times N_{\text{side}}^2$ egyenlő területű cellára osztja a gömböt, ahol N_{side} tetszőleges pozitív egész hatványa 2-nek. Az ezzel a felosztással előállított új részecskék várható tömege nem fog függeni a cella (ϑ_k, φ_k) koordinátáitól. Ez egy széles körben használt felosztása a gömbfelszínnek, így a kezdetifeltétel-generátor írásakor elég csak meghivatkozni a korábban mások által megírt és szabadon hozzáférhető implementációkat.

A másik lehetőség, az úgynevezett kétdimenziós gömbi üvegek használata. Ennél a módszernél első lépésben elő kell állítani egy olyan részecskeeloszlást egy háromdimenziós, egységnyi sugarú gömb felületén, ahol a részecskék között ható gravitációs erő zérus, úgy hogy minden részecske tömege azonos. Ha ezt valamilyen módszerrel előállítottuk, akkor ezt az eloszlást lehet cellázásra használni: azokat a kezdeti részecskéket rendeljük a k gömbi üveg részecskékhez, amiknek a gömbön vett távolsága kisebb bármelyik másik gömbi üveg részecskétől vett távolságnál. Az azonos radiális beosztásban és azonos k részecskéhez tartozó kezdeti részecskéket a 4.16 4.17 4.18 képletekkel egyesítjük egy kezdeti részecskévé. A módszer nehézsége, hogy koránt sem triviális ilyen gömbi üveg részecskeeloszlás előállítása. Ilyen eloszlást úgy kaphatunk, hogy platóni testeket helyezünk a gömbök belsejébe úgy hogy minden csúcsuk a gömbön legyen. Ekkor, ha a csúcsok koordinátáira azonos tömegű testeket teszünk, akkor ezek között a részecskék között zérus erő fog hatni, ha egy kényszerrel biztosítjuk, hogy csak a gömbfelületen mozoghassanak ezek a részecskék. Mivel a háromdimenziós térben csupán öt különböző szabályos test létezik, így ezekkel csupán 4, 8, 6, 12, és 20 részecske helyezhető el a gömbön. Ha több részecskét akarunk a gömbre helyezni, akkor a korábban bemutatott üvegenerálási módszert kell alkalmazni ezen a kétdimenziós zárt felületen: egyenletes eloszlással kell azonos tömegű részecskéket leszórni a gömb felszínére, majd EdS tágulás és taszító gravitáció mellett kell integrálni a mozgásegyenleteiket. Lényeges különbség a hagyományos üvegeneráláshoz képest az, hogy itt egy kényszerrel elő kell írni, hogy a részecskék mindig maradjanak a gömb felszínén. Ezt legegyszerűbben úgy vehetjük

figyelembe, hogy gömbi koordinátákban írjuk fel a mozgásegyenleteket, és minden részecske sugár irányú koordinátáját állandóra állítjuk:

$$r_i = R = 1, \quad \forall i < N_{\text{shell}} \in \mathbb{N}, \quad (4.19)$$

Ahol N_{shell} a gömbfelszínre leszórt részecskék száma. Ezzel a kényszerrel felírhatók a mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta}_i &= \frac{1}{2} \sin(2\vartheta_i) \dot{\varphi}^2 - \frac{G}{R^3 a(t)^3} \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \frac{\cos(\vartheta_i) \sin(\vartheta_j) \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \sin(\vartheta_i) \cos(\vartheta_j)}{d_{ij}^3} \\ &\quad - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \dot{\vartheta}_i \\ \ddot{\varphi}_i &= -2 \frac{\cos(\vartheta_i)}{\sin(\vartheta_i)} \dot{\vartheta}_i \dot{\varphi}_i + \frac{G}{R^3 a(t)^3} \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \frac{\sin(\vartheta_j) \sin(\varphi_i - \varphi_j)}{\sin(\vartheta_i) d_{ij}^3} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \sin^2(\vartheta_i) \dot{\varphi}_i \end{aligned} \quad (4.20)$$

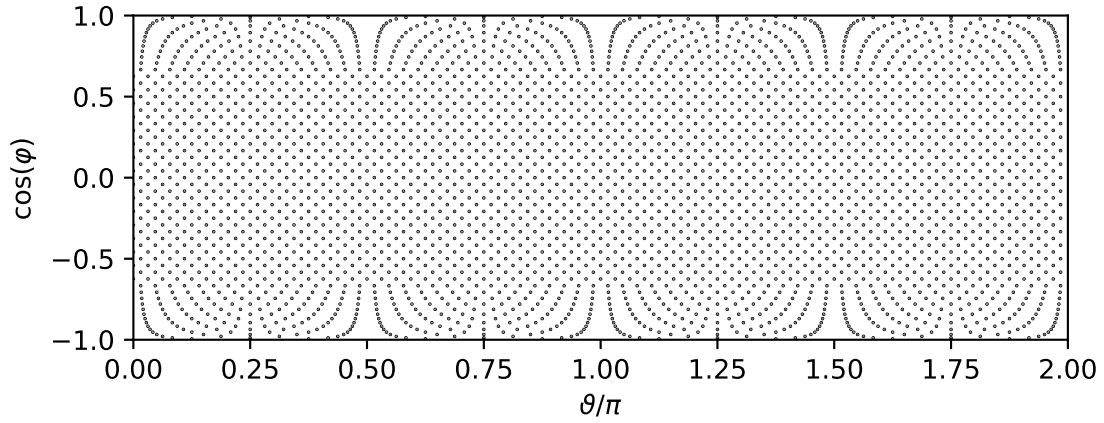
ahol

$$d_{ij} = \sqrt{2(1 - \sin(\vartheta_i) \sin(\vartheta_j) \cos(\phi_i - \phi_j) + \cos(\vartheta_i) \cos(\vartheta_j))} \quad (4.21)$$

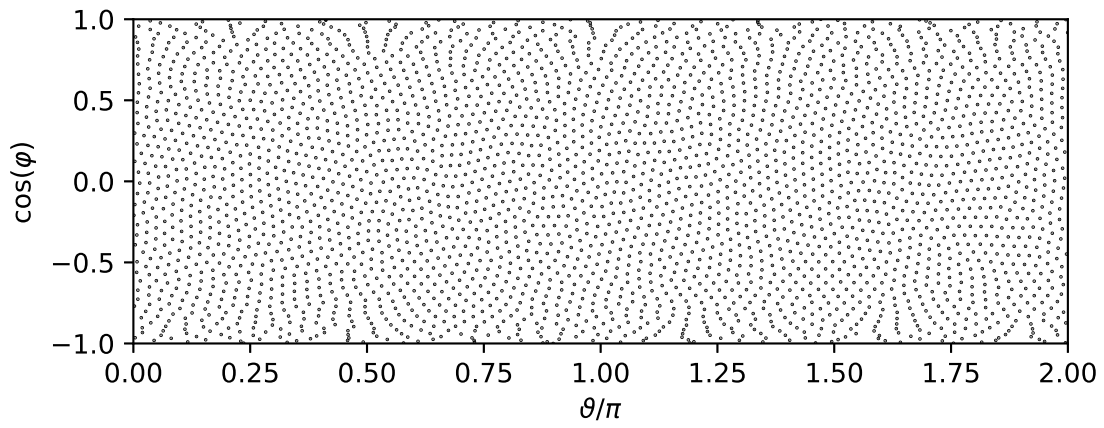
az i és j részecskék közötti euklideszi távolság. Jellemzően $\approx 10^3$ - 10^5 tágulási faktor után a részecskék között ható erők nagysága elhanyagolható lesz. Ha az így kapott részecskéket használjuk a gömb felosztására, akkor garantált, hogy homogén kezdeti feltétel esetén minden részecskére zérus erő fog hatni. Ez nem igaz a HEALPix felosztás esetén, így az utóbbinak a használata csak igen kis kezdeti z_{start} vöröseltolódásokon nem okoz jelentős hibákat a későbbi szimulációkban. Egy így kapott kétdimenziós gömbi-üveg és egy HEALPix rács az 4.4 ábrán látható.

4.4.2. Háromdimenziós gömbi üvegek módszer

A StePS kozmológiai szimulációkban a térbeli- és a tömegfelbontás radiális irányban csökken, így a fejlődés során a különböző tömegű részecskék összekeveredhetnek. A különböző tömegű részecskék keveredése megváltoztathatja a kialakuló struktúrákat, és mesterséges hibákat okozhat. Például, ha egy nagy tömegű részecske bekerül egy jó felbontású térrészre,



(a) HEALPix-rács



(b) Kétdimenziós gömbi üveg

4.4. ábra. A gömbhéjak felosztására használt részecskeeloszlások. Mindkét megvalósítás esetén a részecskeszám $N_{\text{shell}} = 3072$ volt.

az erős gravitációs vonzásával jelentősen megváltoztathatja a kis skálás anyageloszlást. StePS szimulációkban nem lehet megakadályozni, hogy különböző tömegű részecskék keveredjenek, viszont ennek a hatása csökkenthető azzal, hogy kellően finoman változtatjuk a felbontást a sugár függvényében. A kompaktifikációs módszerrel előállított kezdeti feltételek hátránya, hogy a részecskék tömege a kiindulási periodikus kezdeti feltételben lévő részecskék m_p tömegének egész számú többszöröse. Így a belső, állandó felbontású rész után kifelé haladva, valamilyen r_c sugárnál egy olyan régió következik, ahol a részecskék tömege kétszeresére nő. Ettől a hibától mentesek a háromdimenziós gömbi-üveg módszerrel előállított kezdeti feltételek, mivel bennük tetszőlegesen megválasztható a részecskék tömege a sugár függvényében. A módszer igen hasonlít a periodikus kezdeti feltételek generálásához, azzal a különbséggel, hogy egy olyan üveget állítunk elő első lépésben, ami gömbszimmetrikus, és radiális irányban nő a részecskéinek a tömege.

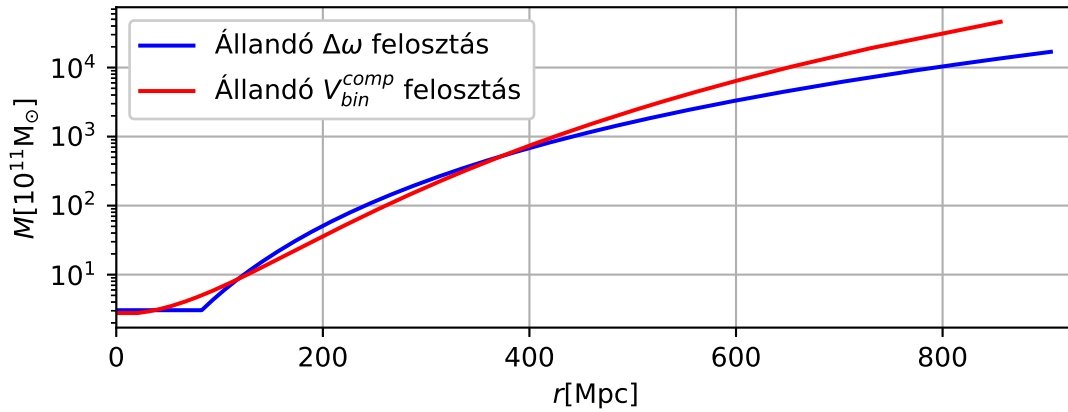
A háromdimenziós gömbi üveg előállításához első lépésben egy R_S sugarú négydimenziós gömb hiperfelszínét fel kell osztani az ω koordináta mentén N_{radial} számú, egymásba ágyazott héjra. Ezek a térfogatok a valódi térben egymásba ágyazott gömbhéjaknak felelnek meg. Ezekbe a héjanként N_{shell} részecskét helyezünk el

$$m_j = \rho_{\text{crit}} \cdot \Omega_m \cdot \frac{V_{\text{shell},j}}{N_{\text{shell}}}, \quad (4.22)$$

tömeggel véletlenszerűen, ahol j a héj indexe, és $V_{\text{shell},j}$ a héj valódi térbeli térfogata. Bár az ω koordinátában a felosztás tetszőleges, a továbbiakban bemutatok két, gyakran használt felosztást. Az első felosztás neve „állandó $\Delta\omega$ felosztás”. Ebben állandó nagyságú, $\Delta\omega$ szélességű héjakra osztjuk a hiperfelületet, kivéve az ω_{max} -on kívüli utolsó héjat. A szabadon megválasztott ω_c -n belüli legbelső héjakat egyesítjük, és összesen

$$N_{\text{inner}} = \text{floor} \left(\frac{4\pi}{3} r_c^3 \Omega_m \rho_{\text{crit}} / m_{\text{inner}} \right) \quad (4.23)$$

részecskét helyezünk el ebben a belső gömbben véletlenszerűen, ahol $r_c = 2R_S \tan(\omega_c/2R_S)$, és m_{inner} az legkülső, még ω_c -n belüli héjhoz tartozó 4.22 képlettel számolt tömeg. Látható, hogy ennél a felosztásnál r_c -n belül a tömegfelbontás állandó, így ezen a tartományon minimá-



4.5. ábra. Kezdeti tömegfelbontás a sugár függvényében az „állandó $\Delta\omega$ felosztás” (kék görbe) és az „állandó V_{bin}^{comp} felosztás” esetén (vörös görbe), háromdimenziós gömbi üvegben. A paraméterek az állandó $\Delta\omega$ felosztás esetén a következők voltak: $R_S = 52,5$ Mpc, $r_c = 82,25$ Mpc, $R_{sim} = 930,03$ Mpc, $N_{radial} = 224$, $N_{shell} = 12288$. Az állandó V_{bin}^{comp} felosztás” esetén a paraméterek az alábbiak voltak: $R_S = 85,0$ Mpc, $R_{sim} = 930,03$ Mpc, $N_{radial} = 145$, $N_{shell} = 12288$. A teljes részecskeszám mindkét esetben $N = 1,8 \cdot 10^6$.

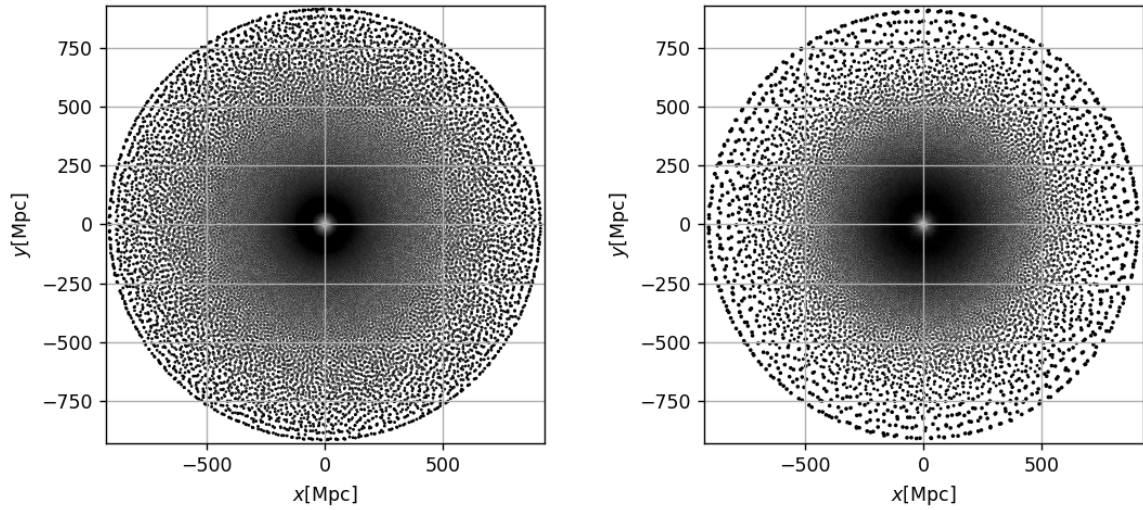
lis lesz a különböző részecskék keveredéséből fellépő hiba a későbbi szimulációk során, míg r_c -n kívül a felbontás folyamatosan csökken.

A másik implementált felosztás az „állandó kompakt térbeli térfogat felosztás” vagy „állandó V_{bin}^{comp} felosztás”. Ebben a héjak belső határához tartozó ω_j^l koordinátát úgy választjuk meg, hogy minden héjnak ugyanakkora legyen a kompakt térbeli térfogata. Ezeket a

$$\frac{8V_{bin}^{comp}}{\pi(2R_S)^3} \cdot j = 2\omega_j^l - \sin(2\omega_j^l), \quad (4.24)$$

egyenlet megoldásával kaphatjuk meg, ahol V_{bin}^{comp} egy héj kompakt térbeli térfogata. Ennek a transzcendens egyenletnek a megoldása nem írható fel zárt alakban, így numerikusan kell megoldani minden j héjra. A határok ismeretében a minden héjban el kell helyezni N_{shell} részecskét véletlenszerűen, és a tömegüket beállítani a 4.22 képlettel. Mivel ebben a módszerben a tömegfelbontás a középpont körül lassan változik, nem szükséges bevezetni az r_c sugarat, amin belül állandó lenne a felbontás. A felbontás a sugár függvényében a 4.5 ábrán látható.

A kapott részecskeeloszlásokból a következő lépésben elő kell állítani a háromdimenziós



4.6. ábra. Háromdimenziós gömbi üvegekből kivágott 8° nyílásszögű gömbcikkék. **Bal:** „állandó $\Delta\omega$ felosztás” **Jobb:** állandó V_{bin}^{comp} felosztás. Az üvegek előállításához használt paraméterek megegyeznek a 4.5 ábrán használtakkal. Az ábrázolt pontok nagysága arányos a részecskék tömegével. A teljes részecskeszám mindkét üveg esetén $N = 1,8 \cdot 10^6$ volt.

gömbi üveget. Ehhez egy StePS szimulációt kell futtatni EdS háttéruniverzummal, fordított gravitáció mellett. Kellően sok lépés után a részecskék egy üvegszerű állapotba rendeződnek, ahol minden részecskére zérus erő hat. Két így előállított üveg látható a 4.6 ábrán. Mivel ezek az üvegek nem periodikusak, így itt mindenképpen annyi gépidőt kell szánni az üveg előállítására, mint egy szimuláció futtatására. Szerencsére az üvegek több kozmológiai paraméterhez és realizációhoz is felhasználhatók, így egy előállított üveg igen sokszor felhasználható lesz a későbbiekben.

A kezdeti feltételek előállításának utolsó lépése ennek a sűrűsége homogén, de sugárirányban csökkenő felbontású részecskeeloszlás megváltoztatása úgy, hogy az előre beállított kozmológiai paraméterekkel és z_{start} kezdeti vöröseltolódással konzisztens legyen a sűrűség- és sebességmező. Ehhez a periodikus esetben is használt módszert kell alkalmazni. Először ki kell számítani a teljesítményspektrumot z_{start} vöröseltolódásra lineáris elméletben, majd ebből elő kell állítani a δ_k mezőt, és ezt felhasználva Zeldovics vagy 2LPT közelítésben meghatározhatók a kezdeti koordináták és sebességek. StePS kezdeti feltételek esetén két lényeges pontban tér el a kezdetifeltétel-generálás a periodikus esethez képest. Az első különbség, hogy nincs egy állandó tipikus részecskeszeparáció, mivel a szimuláció belsejétől kifelé haladva egyre távolabb

vannak egymástól a részecskék, és így nincs egy jól definiált k_{Ny} Nyquist hullámszám az egész szimulációra. A második különbség, hogy mivel nem periodikus a geometria, így szabadon megválasztható L_{box} mérete a periodikus doboznak, amire az elmozdulásmezőt kiszámítjuk.

Mivel itt csak adott méretű gömbhéjanként tekinthető állandónak a várható részecske-szeperáció a valódi térben, ezért minden j gömbhéjhoz saját $k_{Ny,j}$ hullámszám tartozik. A legegyszerűbben úgy lehet kezdeti feltételt előállítani, hogy minimális, azaz a legbelső régióhoz tartozó $k_{Ny,\text{inner}} = \pi/\Delta x_{\text{inner}}$ hullámszámmig számoljuk ki az elmozdulásmezőt a teljes térfogatra. Ennek hátránya, hogy így a külső, nagy térrészeket reprezentáló részecskékre olyan kis skálás perturbációkat is hattatunk, amik azon a térrészen nincsenek felbontva, és így ezek a külső régiók szerkezetét nem kívánt módon változtatják meg. Ez a hiba úgy kerülhető el, hogy kiszámítjuk az elmozdulásmezőt a $k_{Ny,\text{inner}}$ belső és a legkülső régióhoz tartozó $k_{Ny,\text{outer}}$ hullámszámokra, és néhány ezek közé eső értékre, majd ezek között interpolálva minden gömbhéjhoz tartozó elmozdulás- és sebességmező meghatározható.

Az L_{box} paraméter megadja, hogy mekkora periodikus dobozra számítjuk ki az elmozdulásmezőt, és alapvetően befolyásolja, hogy milyen jellegű StePS kezdeti feltételt állítunk elő. Ha $L_{\text{box}} < 2R_{\text{sim}}$ akkor ugyanazok a struktúrák többször fognak megismétlődni periodikusan a StePS szimulációban, és $k_{\text{min}} = 2\pi/L_{\text{box}}$ hullámszámnál kisebb hullámszámú fluktuációk nem lesznek jelen a szimulációban. Ezzel a választással lehet újraszimulálni korábban lefuttatott periodikus szimulációkat StePS algoritmussal. Ha $L_{\text{box}} > 2R_{\text{sim}}$ -nek választjuk, akkor nem lesznek ismétlődő struktúrák, és megjelennek a szimulált térfogat lineáris méreténél nagyobb hullámhosszú fluktuációk is. $L_{\text{box}} > 4R_{\text{sim}}$ választás esetén az elmozdulásmező periodicitásának minden hatása eltűnik, és így egy ilyen kezdeti feltételből indított szimuláció sokkal inkább fog a megfigyelt Univerzumra hasonlítani mint egy hagyományos periodikus.

Utolsó lépésként át kell skálázni a részecskék tömegeit a

$$m_j = m_j^{\text{glass}} \frac{\Omega_m \rho_{\text{crit}} \cdot \frac{4\pi}{3} R_{\text{sim}}^3}{\sum_{i=1}^N m_i^{\text{glass}}}, \quad (4.25)$$

képlettel, ahol m_j a j indexű részecske tömege, m_j^{glass} az eredeti tömege a részecskének az üvegben, és R_{sim} a szimuláció sugara. Ha a célunk az, hogy nem együttmozgó szimulációkat futtassunk, akkor még át kell térni fix koordinátákra a 4.10 képlettel. Az így előállított kezdeti feltételek mentesek minden felvetődött hibától, viszont előállításuk lényegesen több erőforrást igényel mint az egyszerűbb kompaktifikációs kezdeti feltételek.

Mivel a StePS szimulációk csak egy kis részén nagy a felbontás, ezért bármilyen módszerrel is állítjuk elő a kezdeti feltételeket, ezek mindig lényegesebben kevesebb részecskét fognak tartalmazni, mint egy hagyományos, állandó felbontású periodikus szimuláció. A StePS geometria használatának további előnye, hogy a különböző hullámszámú módusok száma sokkal kiegyensúlyozottabb, mint a hagyományos esetben. A 3.24 képlet alapján periodikus szimulációkban a k hullámszámon vizsgált módusok száma arányos k^2 -el. Ebből következik, hogy míg a nagy hullámszámú fluktuációk hibája elenyésző, addig a nagy hullámhosszú módusok alulreprezentáltak. A StePS szimulációk esetén a kis skálás módusokat csak a szimuláció középpontja körül fejlesztjük, így viszonylag kevés részecskével igen nagy dinamikai tartomány vizsgálható. Ez a kis részecskeszám lehetővé teszi, hogy akár egy nagyobb teljesítményű személyi számítógépen vagy laptopon vizsgáljunk olyan dinamikai tartományokat, amik korábban csak szuperszámítógépeken voltak elérhetők, vagy szuperszámítógépeken futtathatunk sok, igen gyors szimulációt például különböző kozmológiák vizsgálata céljából. Természetesen a módszer hátránya, hogy csak egy kis térrészen, és nem az egész térfogatban nagy a felbontás.

Korábban is léteztek hasonló "zoom-in" szimulációk, amik esetén a szimuláció belsejében egy kisebb dobozban volt nagyobb a felbontás. Ezek viszont periodikusak, és a felbontás is igen élesen változik bennük [49]. A térben túl gyorsan változó felbontás mesterséges struktúrákat okozhat az átmenet környezetében.

5. fejezet

A StePS szimulációk masszív párhuzamosítása GPU klaszterre

A StePS szimulációk elméletének kidolgozása után implementáltam az első, ilyen szimulációs programot C++ nyelven, ami képes egyszerre nagy számú GPGPU-n futni [62]. A megírt implementáció neve `StePS`, és szabadon hozzáférhető GNU GPL licenc v2 verziója alatt a <https://github.com/eltevo/StePS> oldalon. Ebben a fejezetben bemutatom az implementáció lényeges részeit. A program telepítésének és használatának leírása megtalálható az A függelékben.

5.1. Mozgásegyenletek integrálása

StePS kozmológiai szimuláció során egy megfelelő kezdeti állapotból elindított táguló Univerzumban oldjuk meg a részecskék 4.7 vagy 4.12 mozgásegyenleteit. Ezek numerikus integrálásához célszerű szimplektikus, alacsony rendű integrátort alkalmazni, hogy így csökkentsük a lépésenként szükséges erőszámítások számát, mivel ez a legköltségesebb művelet a szimuláció során. Kozmológiai szimulációkban gyakran használt módszer a KDK (Kick-Drift-Kick) integrálás [76]. A `StePS` implementációmban is ezt használom. Az integrátor két különböző operátort használ, a

$$K_i(\Delta t) : \begin{cases} \mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}_i \\ \mathbf{v}_i \mapsto \mathbf{v}_i + \mathbf{A}_i \cdot \Delta t \end{cases} \quad (5.1)$$

’kick’ és a

$$D_i(\Delta t) : \begin{cases} \mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \cdot \Delta t \\ \mathbf{v}_i \mapsto \mathbf{v}_i \end{cases} \quad (5.2)$$

’drift’ operátort, ahol \mathbf{A}_i az i részecske gyorsulása. Az integrálás során ebből a két operátorból felépített

$$\tilde{U}(\Delta t) = K \left(\frac{\Delta t}{2} \right) D(\Delta t) K \left(\frac{\Delta t}{2} \right). \quad (5.3)$$

idő léptetési operátorral fejlesztjük a rendszert. Bár lépésenként elég egyszer kiszámítani az erőket minden részecskére, a módszer másodrendű, tehát a léptetés során elkövetett hiba arányos $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ -el. A Δt lépéshosszt a szimuláció során úgy változtatjuk, hogy minden lépésnél hozzávetőlegesen ugyanakkora legyen a hiba. Ennél az integrátornál a gyorsulás nagyságával is arányos a hiba minden részecske esetén, ezért a

$$\Delta t = \min \left[\Delta t_{\max}, \sqrt{\frac{2\eta_i \epsilon}{|\mathbf{A}_i|}} \right], \quad (5.4)$$

képlettel határozza meg a szimulációs program az lépéshosszt minden lépésben, ahol $\eta_i = 2,8 \cdot h_i$ a Plummer-ekvivalens simítási hossz, ϵ az előírt pontossági paraméter. Δt_{\max} a maximális megengedett lépéshossz. A *GADGET-2* hagyományos kozmológiai N-test kód ugyanezt az integrátort és lépéshosszválasztást használja [76].

Együttlmozgó koordináták esetén a mozgásegyenletekben megjelenik az $a(t)$ skálafaktor és első deriváltja, így a mozgásegyenletekkel együtt numerikusan meg kell oldani a 2.19 Friedmann-egyenletet. Erre egy negyedrendű Runge–Kutta-integrátort használ az implementáció. Az integrálás során a Friedmann-egyenlet integrátor lépéshossza megegyezik az N-test integrátor aktuális Δt lépéshosszával. A program a szimuláció kezdetén is integrálja ezt az egyenletet, hogy meghatározza a kezdeti $a_{\text{start}} = 1/(z_{\text{start}} + 1)$ skálafaktorhoz tartozó t_{start} időpontot. Ehhez fix, de igen kicsi lépéshosszt használ.

5.1.1. A program vázlatos működése

A mozgásegyenletek integrálási módszerének ismeretében egyszerűen összefoglalható a program működése:

1. Kezdeti paraméterek beolvasása
2. Kezdeti időpont meghatározása z_{start} -ból
3. Kezdeti feltétel beolvasása
4. Kezdeti erőszámítás
5. Fő ciklus. Ez ismétlődik a szimuláció végéig.
 - 5.1. $K\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ - sebességek léptetése
 - 5.2. $D(\Delta t)$ - koordináták léptetése
 - 5.3. Erők számítása
 - 5.4. $a(t)$ és $H(t)$ számítása
 - 5.5. $K\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$ - sebességek léptetése az új gyorsulások ismeretében
 - 5.6. Δt lépéshossz megváltoztatása
 - 5.7. Kimeneti fájlok kiírása, ha a szimuláció elérte a kiíráshoz szükséges időpontot.
6. Végállapot kiírása.

5.2. Az erők számítása

Mivel a StePS szimulációkban lényegesen kevesebb részecske van, mint egy hagyományos, nagy felbontású periodikus szimulációban, így lehetséges direkt gravitációs erőszámítás a részecskék között, szemben a hagyományos periodikus módszerekkel. A szimulációs program minden más része $\mathcal{O}(N)$ -el vagy jobban skálázódik, ezért néhány száz részecske felett a futási idő szinte teljes része az erőszámításra fordítódik, tehát célszerű ezt a programrészt minél inkább felgyorsítani. A részecskeszám jellemzően néhány millió, így egy szimulációhoz csupán néhány száz MB memória szükséges. Ez a kicsi memóriagény lehetővé teszi, hogy nagy

hatásfokkal párhuzamosítsuk az erőszámítást grafikus kártyákkal, mivel a teljes szimuláció feltölthető a kártyák memóriájába. A GPU párhuzamosításhoz CUDA¹ nyelvet használtam. Természetesen a program futtatható tisztán processzorokon (CPU) is, ekkor a párhuzamosítás OpenMP² és MPI³ segítségével történik. A program képes akár egy nagy klaszteren egyszerre nagy számú grafikus kártyán párhuzamosan erőt számítani, igen jó párhuzamosítási hatásfok mellett. Ezt a hatásfokot a 5.3 alfejezetben határozom meg részletesen.

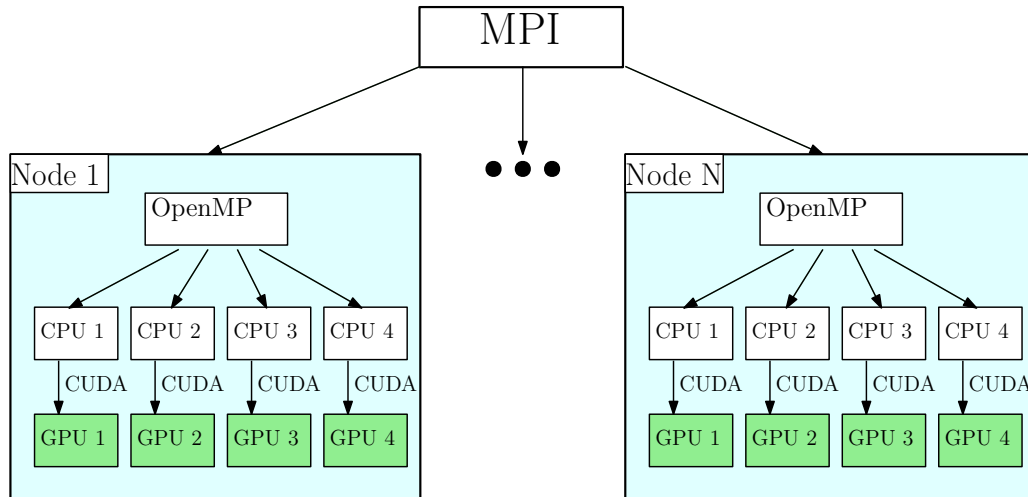
A három említett párhuzamosítási módszer több pontban is lényegesen eltér egymástól. Az OpenMP (Open Multi-Processing) egy alkalmazásprogramozási interfész (Application Programming Interface – API), aminek segítségével egy szerveren, megosztott memória mellett lehet párhuzamosan futtatni. Ennél be lehet állítani, hogy a programban használt változók közül melyek legyenek minden szál számára megosztottak, és melyekről legyenek saját másolataik. Az MPI (Message Passing Interface) standard elsősorban szerverek közötti kommunikációra lett kifejlesztve. Ennek használata esetén több példányban fut a program, és ezek a szálak egymással kommunikálva közösen végzik az adott probléma megoldását. A CUDA API segítségével lehetséges grafikus kártyára kiterjeszteni a párhuzamosítást. Ebben az esetben a számításokhoz szükséges adatokat fel kell tölteni a szerver memóriájából a GPU memóriájába, és az erre megírt és lefordított, úgynevezett kernelek segítségével a grafikus kártya elvégzi az előírt számításokat. Akár több ezer szálon is történhetnek számítások egy GPU-n, és egy ilyen kártya akár 100-szor gyorsabb lehet lebegőpontos műveletek esetén, mint egy hasonló árú CPU.

Az erőszámítás párhuzamosítása kettő vagy három szinten történik, attól függően, hogy CPU-n vagy GPU-n történik a számítás. Az első szint a szerverek közötti kommunikáció egy klaszteren belül. Erre az OpenMPI MPI implementációt használja a program. Az első szinten a "fő" szerver elküldi a részecskék koordinátáit és tömegeit minden számításban résztvevő szervernek, majd miután ezek elvégezték a szükséges számításokat összegyűjti a kiszámított erőket, és elvégzi ennek ismeretében az integrálást. Itt minden szerver $\text{floor}(N/N_{\text{node}})$ részecskére határozza meg az erőt, kivéve a "fő" szerver, ami $\text{floor}(N/N_{\text{node}}) + \text{mod}(N/N_{\text{node}})$ -re, ahol N a teljes részecskeszám, és N_{node} a szerverek száma. A párhuzamosítás második szintje az adott szerveren belüli párhuzamosítás az OpenMP könyvtárral. Ha az erőszámítás csak

¹<https://developer.nvidia.com/cuda-zone>

²<https://www.openmp.org/>

³<https://www.open-mpi.org/>



5.1. ábra. Erőszámítás egy GPU klaszteren, MPI-OpenMP-CUDA hibrid párhuzamosítással.

CPU-kon történik, akkor ez a párhuzamosítás utolsó szintje. Itt megosztott memória mellett egyenletesen szétosztjuk az erőszámítást az elérhető CPU-magok között. Ha GPU-kat is használunk, akkor a második szinten minden szerveren annyi OpenMP szál indul, ahány GPU elérhető szerverenként, és minden egyes ilyen szál a hozzá tartozó GPU-t vezérli: feltölti illetve letölti a szükséges adatokat a grafikus kártyára, illetve elindítja és ha kell leállítja a számításokat itt. A GPU-n történik párhuzamosítás harmadik szintje. Az MPI-OpenMP-CUDA hibrid párhuzamosítás áttekinthető az 5.1 ábrán.

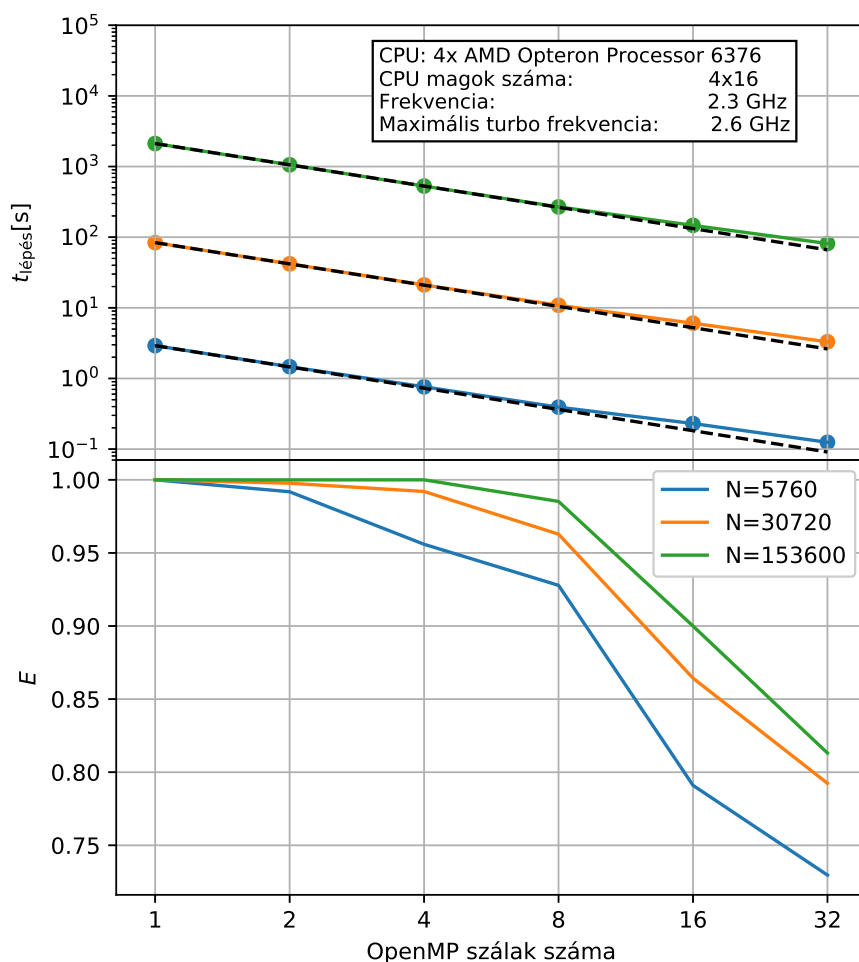
5.3. Teljesítményelemzés

A párhuzamosítás hatékonyságát több, nem periodikus standard Λ CDM szimuláción teszteltem, négy különböző hardverkonfiguráció mellett. Minden szimuláció esetén 10 időlépésből határoztam meg átlagolással az egy, a 5.1 alfejezetben leírt lépéshez szükséges időt. A párhuzamosítás E hatásfokát az

$$E = t_{\text{lépés}}(N_{PU}) / (t_{\text{lépés}}(N_{PU} = 1) \cdot N_{PU}) \quad (5.5)$$

képlettel határoztam meg minden próba esetén, ahol N_{PU} a számítást végző egységek számát, és $t_{\text{lépés}}$ az egy időlépés elvégzéséhez szükséges időt jelöli. A számítást végző egységek lehetnek CPU-magok, a szerverek, vagy a grafikus kártyák attól függően, hogy milyen szintjét

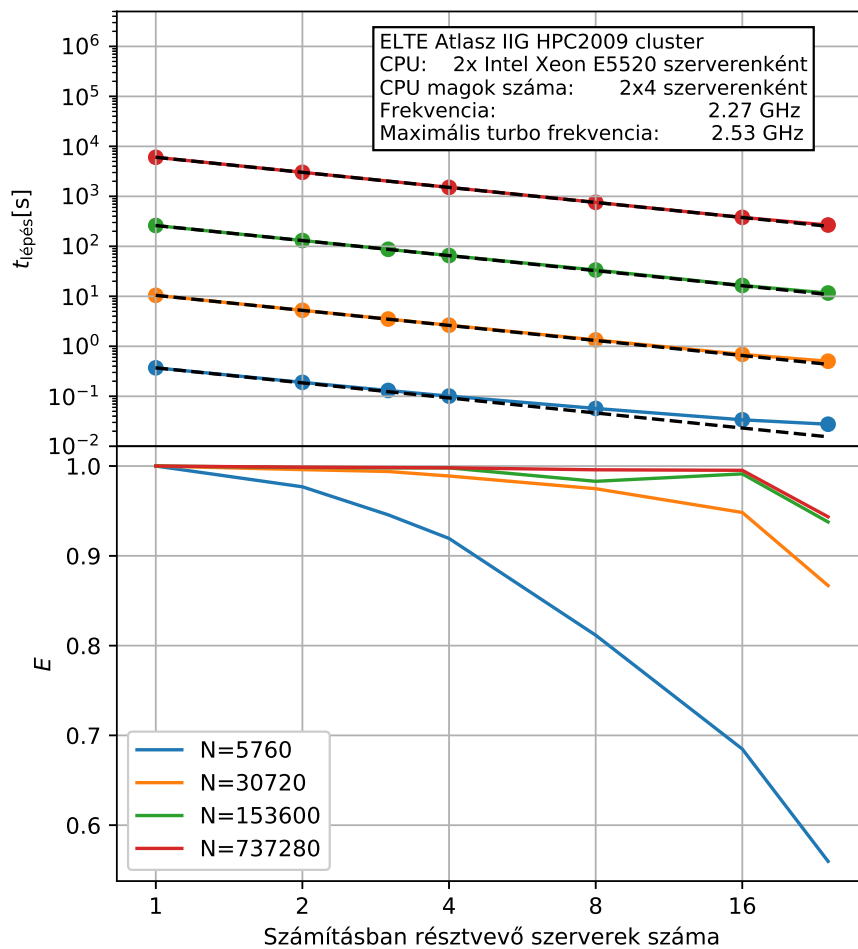
vizsgálom a párhuzamosításnak.



5.2. ábra. Az OpenMP párhuzamosítás vizsgálata a `StePS` program esetén. **Fent:** Egy időlépéshez szükséges idő a használt CPU-magok számának függvényében. A szaggatott vonal az elméletben elérhető maximális párhuzamosítási hatásfokot reprezentálja. **Lent:** Az OpenMP párhuzamosítás hatásfoka a számítást végző CPU-magok számának függvényében. A különböző színek a különböző részecskeszámokat reprezentálják.

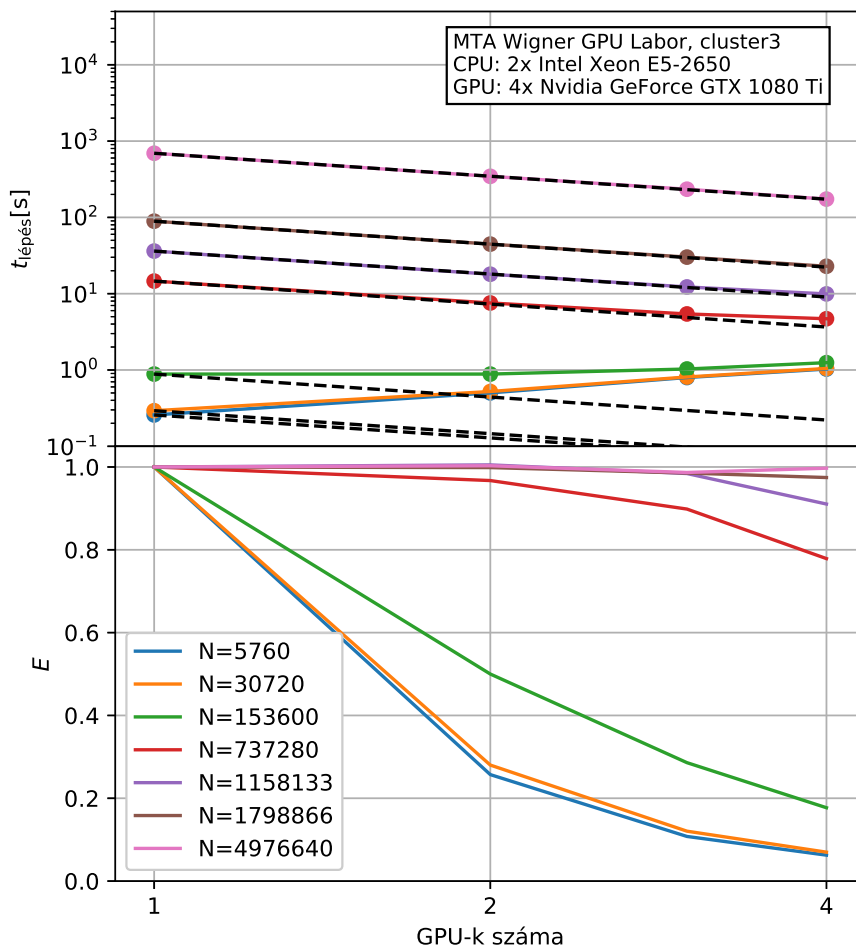
Az első teszt során a csak CPU-t használó OpenMP párhuzamosítást vizsgáltam egy szerveren belül. A teszthez az MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont GPU laborjának⁴ Opteron szerverét használtam. Ez egy alaplapon, megosztott memória mellett 4 darab AMD Opteron 6376 CPU-t tartalmaz. Mindegyik CPU 16 magból állt, így itt akár 64 szálig tesztelhető

⁴<http://gpu.wigner.mta.hu/hu>



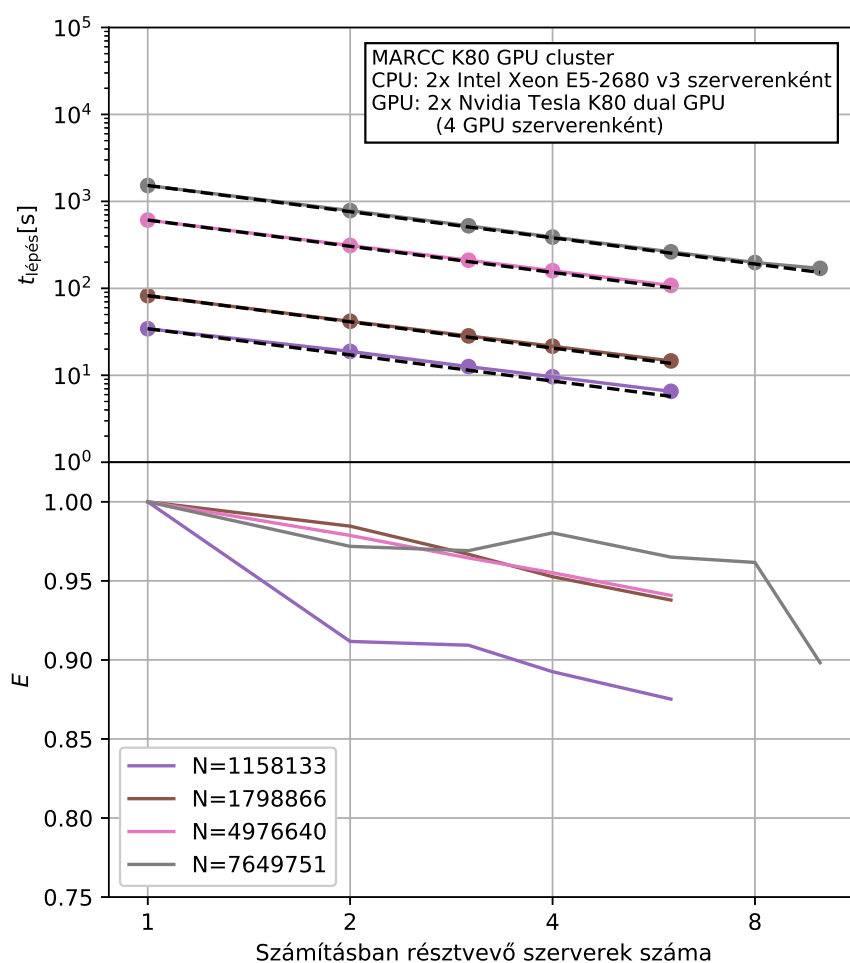
5.3. ábra. Az MPI-alapú párhuzamosítás vizsgálata. **Fent:** Egy lépéshez szükséges idő a számítást végző szerverek függvényében, különböző részecskeszámok mellett. A szaggatott vonal az elméletben elérhető maximális párhuzamosítási hatásfokot mutatja. **Lent:** Az MPI-alapú párhuzamosítás hatásfoka az erőszámítást végző szerverek számának függvényében. A különböző színek a különböző részecskeszámokat reprezentálják.

az OpenMP párhuzamosítás hatásfoka. A tapasztalat azt mutatta, hogy ha itt egy CPU-n az összes mag egyszerre végez számításokat, akkor kisebb órajelen történik a számítás, így az egy magra eső teljesítmény jelentősen lecsökken. Ezt a viselkedést feltehetően a processzor túlmelegedésének megakadályozása miatt tervezték. A tesztet ezért csak 32 szálra futtattam le, így a hardver tervezéséből adódó teljesítménycsökkenés nem mutatkozik a program hatásfokát mérő grafikonon. A mért adatok az 5.2 ábrán láthatók. A részecskeszám növelésével



5.4. ábra. Az OpenMP-CUDA párhuzamosítás hatásfoka. **Fent:** Egy lépéshez szükséges idő a számítást végző GPU-k függvényében, különböző részecskeszámok mellett. A szaggatott vonal az elméletben elérhető maximális párhuzamosítási hatásfokot mutatja. **Lent:** Az OpenMP párhuzamosítás hatásfoka a grafikus kártyák számának függvényében. A különböző színek a különböző részecskeszámokat reprezentálják.

a párhuzamosítás hatásfoka nőtt, és 8 szál esetén $N = 153600$ részecske esetén már 98,5% felett volt a CPU-magokra vonatkoztatott párhuzamosítás hatásfoka. A mért időkből látszik, hogy a processzormagok számának növelése csökkenti a párhuzamosítás hatásfokát. Ennek fő oka, hogy csak az erőszámítás lett párhuzamosítva a programban, így ez a rész minél gyorsabb, annál inkább több időt fognak igénybe venni a nem párhuzamosított részek a teljes futási időhöz képest. Mivel $\mathcal{O}(N^2)$ -el skálázik az erőszámítás és $\mathcal{O}(N)$ -el vagy jobban a többi rész,



5.5. ábra. Az MPI-OpenMP-CUDA párhuzamosítás hatásfoka. **Fent:** Egy lépéshez szükséges idő a számítást végző GPU szerverek függvényében, különböző részecskeszámok mellett. A szaggatott vonal az elméletben elérhető maximális párhuzamosítási hatásfokot mutatja. **Lent:** A szerverek közötti párhuzamosítás hatásfoka az erőszámításban résztvevő szerverek számának függvényében. A különböző színek a különböző részecskeszámokat reprezentálják.

így ez a hatás kicsi részecskeszámok esetén jelentős. Több részecske esetén jelentős lehet a memória véges sebességének hatása: a független szálak ugyanarról a megosztott memóriáról kérik le, és ugyanabba írják vissza az adatokat, ezért ez több szálal lassabban tud kiszolgálni mint a referencia, egy magot használó futás esetén.

klaszterén⁵ teszteltem. Ez egy régi, több mint tíz éves gigabit ethernet klaszter összesen 43 szerverrel és szerverenként 8 CPU-maggal. Bár ez a rendszer semmiképpen sem nevezhető modernnek, az MPI-OpenMP skálázás jól vizsgálható rajta, így csak a relatív sebességnövekedés érdemes figyelni, és nem az abszolút időket. Minden szerveren a maximális lehetséges 8 OpenMPI szál futott a teszt során. A mért adatok az 5.3 ábrán láthatók. Itt is hasonló skálázás figyelhető meg, mint az OpenMP perhuzamosítás esetén: a hatásfok növekedik, ha nő a részecskeszám, és csökken, ha nő az erőszámításban részvevő szerverek száma. $N > 10^5$ részecskeszám esetén az MPI szálak közötti kommunikáció költsége 1% alatt volt 16 szerver mellett a teljes futási időhöz viszonyítva.

Az OpenMP-CUDA párhuzamosítás próbája az MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont GPU laborjának egy, 4 darab NVIDIA GTX 1080ti grafikus kártyát tartalmazó szerverén történt. A lefuttatott tesztek eredményei az 5.4 ábrán láthatók. A tesztszimuláció, ami $N = 7,37 \cdot 10^5$ részecskét tartalmazott ≈ 800 -szor gyorsabban futott le egy GPU szerveren, mint egy referencia Atlasz CPU szerveren. Alacsony részecskeszám esetén itt a párhuzamosítás hatásfoka rossz, mivel a kártyák sokkal gyorsabban be tudják fejezni a szükséges számításokat, mint az adatok mozgatásához szükséges idő. Ezért legalább $N = 5 \cdot 10^5$ részecskével érdemes több GPU-t használni.

Az utolsó teszttel az MPI-OpenMP-CUDA párhuzamosítást vizsgáltam a Maryland Advanced Research Computing Center⁶ (MARCC) GPU klaszterén. Itt legfeljebb 10 szerveren futtattam, és minden szerveren az összes elérhető GPU-n történt az erőszámítás, így összesen 40 grafikus kártyán tudtam letesztelni a `StEPS` szimulációs kódot. A lefuttatott tesztek eredményei az 5.5 ábrán láthatók.

⁵<https://hpc.iig.elte.hu>

⁶<https://www.marcc.jhu.edu/>

N_{GPU}	$t_{lépés}(s)$	MPI szálak száma	Hatékonyság
1	5942,11	1	1,0
2	3060,33	1	0,97083
4	1524,02	1	0,97474
6	1042,30	2	0,95016
8	784,11	2	0,94727
12	524,20	3	0,94463
16	388,65	4	0,95557
24	263,21	6	0,94065
32	198,10	8	0,93736
40	169,67	10	0,87554

5.1. táblázat. Az MPI-OpenMP-CUDA hibrid párhuzamosítási tesztből származó adatsor, $7,6 \cdot 10^6$ részecske esetén. A párhuzamosítási hatékonyságot az 5.5 képlettel számítottam.

6. fejezet

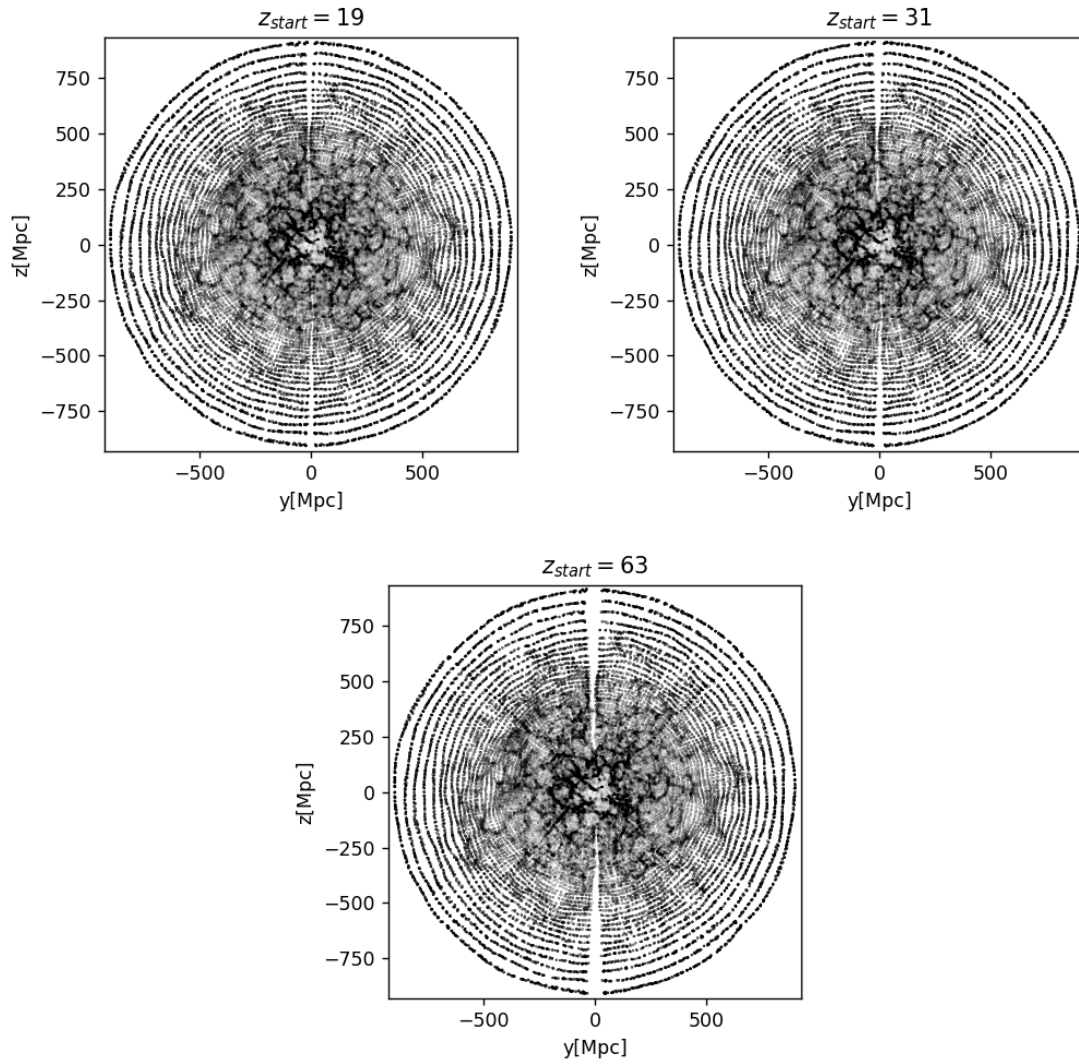
A lefuttatott StePS szimulációk

6.1. Az első StePS szimulációk

Az elkészült szimulációs programot Λ CDM kozmológiai szimulációkon teszteltem. Ezekkel a próba szimulációkkal megvizsgáltam azt, hogy kialakulnak-e fals struktúrák, milyen hatással van a kezdeti feltétel generáló algoritmus megválasztása a végállapokra, és azt, hogy a StePS szimulációk eredményei mennyire egyeznek a hagyományos periodikus szimulációk eredményeivel. Minden szimuláció esetén a kozmológiai paraméterek a 2.2 táblázatban található Planck paraméterek voltak. Mindkét korábban bemutatott módszerrel generáltam StePS kezdeti feltételeket $z_{\text{start}} = \{19; 31; 63\}$ kezdeti vöröseltolódásokkal, minden esetben ugyanazokkal fázisokkal és lineáris elméletben $z = 0$ -ig fejlesztett amplitúdókkal. Így az összes lefuttatott szimuláció esetén ugyanazok a struktúrák kifejlődése volt várható.

Felosztás	HEALPix	2D gömbi üveg
L_{box} [Mpc]	1860,05	1860,05
R_{sim} [Mpc]	930,03	930,03
R_S [Mpc]	52,5	52,5
N_{shell}	12288	12288
N_{radial}	224	224
N_{part}	$1,47 \cdot 10^6$	$1,47 \cdot 10^6$
m_{min} [$10^{11} M_{\odot}$]	7,38	7,38

6.1. táblázat. Kompaktifikációs módszerrel előállított kezdeti feltételekhez tartozó paraméterek. A kozmológiai paraméterek a 2.2 táblázatban találhatók.



6.1. ábra. A kompaktifikációs módszerrel, HEALPix felosztással előállított kezdeti feltételekből futtatott StePS szimulációk $z = 0$ végállapota az y - z sík körüli vékony szeletben. Jól látható a HEALPix felosztás hibájából kialakuló mesterséges üreg a z tengely mentén. További torzítást okozhat a későbbi kiértékelésekben, hogy igen éles gömbhéjakba rendeződtek a részecskék a szimuláció külső tartományain.

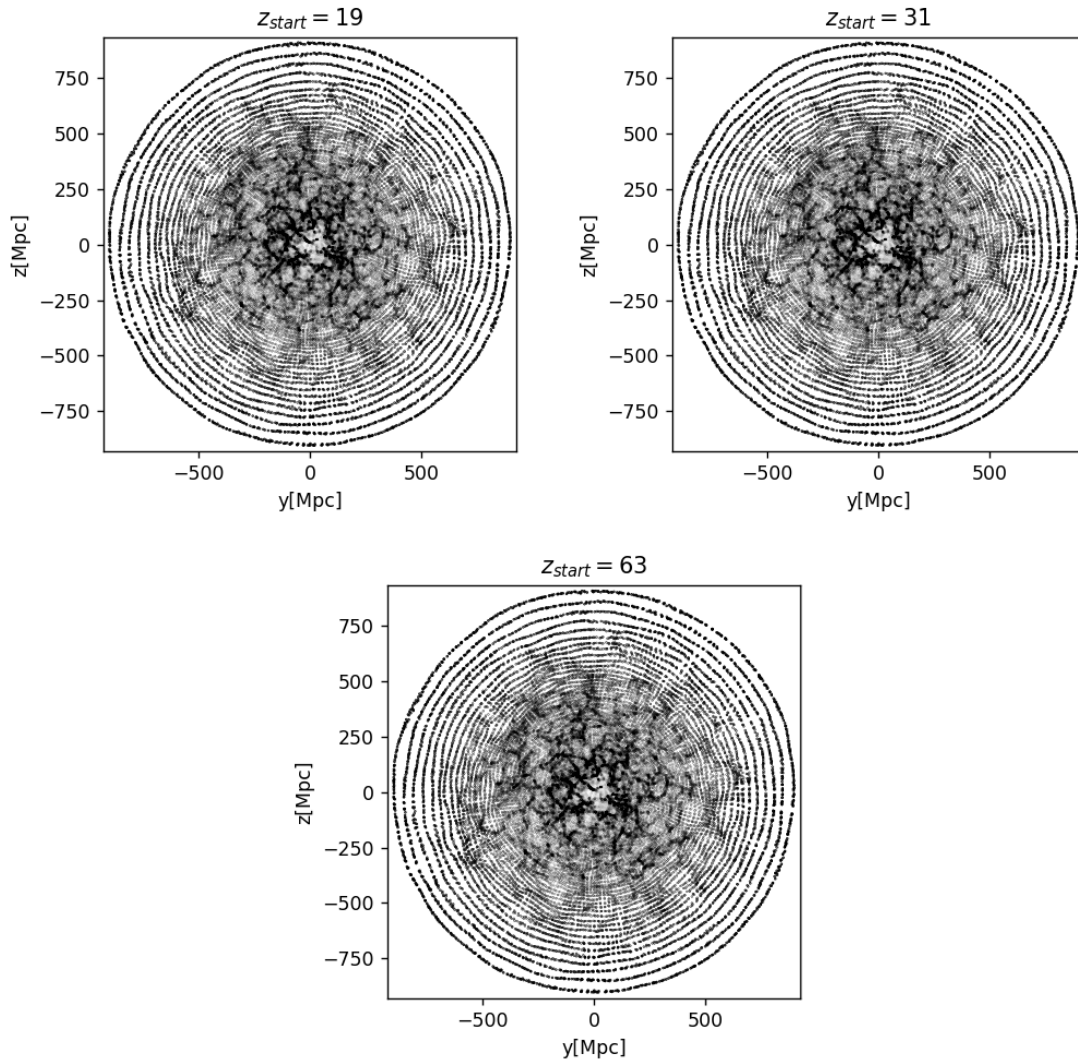
A kompaktifikációs módszerhez szükséges periodikus kezdeti feltételeket a másodrendű Lagrange perturbációs módszert használó 2LPTic [12] programmal állítottam elő. Az ehhez tartozó periodikus doboz élhossza $1260 \text{ Mpc}/h$ volt, $3,43 \cdot 10^8$ részecskét tartalmazott, és itt minden részecske tömege $7,3 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ volt. A kompaktifikációhoz tartozó paraméterek a 6.1 táblázatban találhatók. A HEALPix felosztású kezdeti feltételből indított szimulációk végállapotát a 6.1 ábrán mutatom be. Ezekben jól láthatóan mesterséges struktúrák alakultak ki: a z tengely mentén szétnyílt a szimulációs térfogat, és a $z = \pm y$ egyenesek mentén kicsit

megnőtt a sűrűség. Ezek a struktúrák annál erősebbek voltak, minél korábbi állapotból indultak a szimulációk, így a HEALPix felosztás használata csak igen kis kezdeti vöröseltolódás esetén alkalmazható, és ekkor is igen nagy körültekintéssel. A szimulációban a hibát az okozta, hogy bár a felosztás esetén egy gömbhéjban minden cella egyforma nagyságú, a cellák középpontjainak eloszlása nem teljesen egyenletes: kicsit távolabb vannak a gömb északi és déli pólusán, mint az egyenlítő környékén. A 6.2 ábrán bemutatott, kétdimenziós gömbiüveg-felosztású kezdeti feltételekből indított szimulációk végállapotaiban ilyen struktúrák nem jelentkeztek, így ennek a módszernek a használata javasolt, ha a kompaktifikációs módszert alkalmazzuk. Ennek oka, hogy ebben az esetben a gömbhéjakban a felosztás úgy történik, hogy homogén esetben zérus erő hatson minden cella középpontjába helyezett részecskére. Mindkét esetben jól látható a kompaktifikációs módszer egyik hátránya: a szimuláció külső régióiban a részecskék éles gömbhéjakba rendeződtek. Ez az elrendezés a kezdeti feltételekben még jelentősebb, viszont a belső régiókban, ahol sűrűbben helyezkednek el a részecskék, ez a részecskék keveredése miatt kisebb vöröseltolódásokra eltűnik. A külső régiókban azért tud megmaradni ez a szerkezet, mert itt nagyobb térfogatokat reprezentálnak a részecskék, és ahogy haladunk a homogenitás skálája felé, úgy egyre lassabban fejlődnek ezek a struktúrák.

A háromdimenziós gömbi üveg módszerrel generált kezdeti feltételekhez a 4.6 ábrán látható üvegeket használtam. Mint az várható volt, az ezekből indított szimulációk esetén nem láthatók mesterséges struktúrák sem a gömbhéjakon, sem pedig radiális irányban, így ennek a módszernek a használata javasolt, ha rendelkezésre állnak a szükséges erőforrások. A $z = 0$ végállapotok mindkét üveg esetén megtekinthetők a 6.3 ábrán.

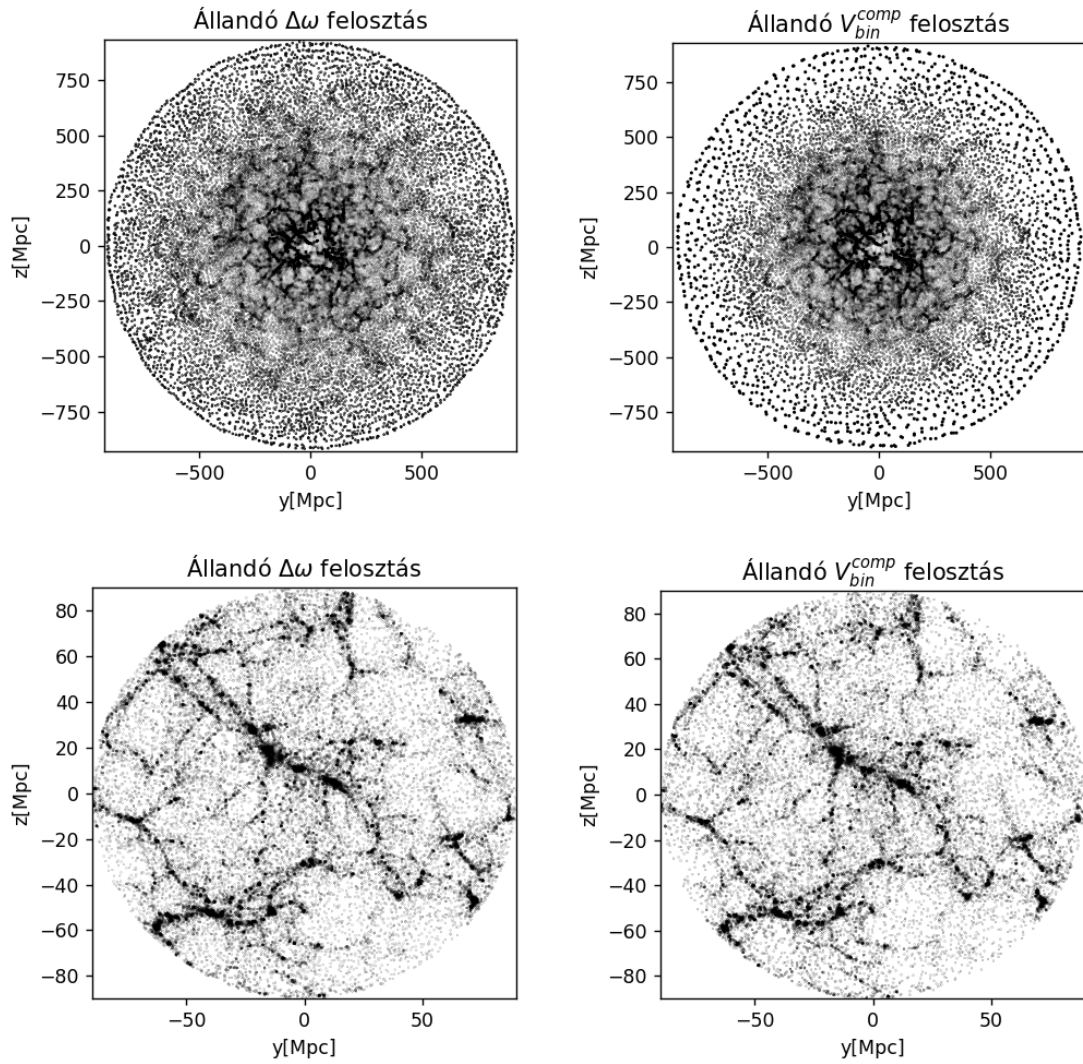
6.1.1. A periodikus és a StePS szimulációk összevetése

A kompaktifikációs módszerhez használt $z_{\text{start}} = 63$ kezdeti vöröseltolódású periodikus kezdeti feltételből futtattam egy periodikus szimulációt a *GADGET-2* kozmológiai szimulációs programmal. Mivel a két szimulációban várhatóan ugyanazok a struktúrák alakulnak ki, így a lefutott StePS szimulációk eredményei könnyen összehasonlíthatók voltak a hagyományos módszer eredményeivel. Az összehasonlításához a $z_{\text{start}} = 63$ kezdeti vöröseltolódású, állandó $\Delta\omega$ felosztású háromdimenziós gömbi üvegből előállított kezdeti feltételből indított



6.2. ábra. A kompaktifikációs módszerrel, kétdimenziós gömbi-üveg felosztással előállított kezdeti feltételekből futtatott StePS szimulációk $z = 0$ végállapota az y - z síkban. Ezek a szimulációk már mentesek gömbhéjak ϑ φ felosztásaiból eredő hibáktól, viszont a sugár irányú felosztás itt is éles gömbhéjakat hozott létre a külső tartományokban.

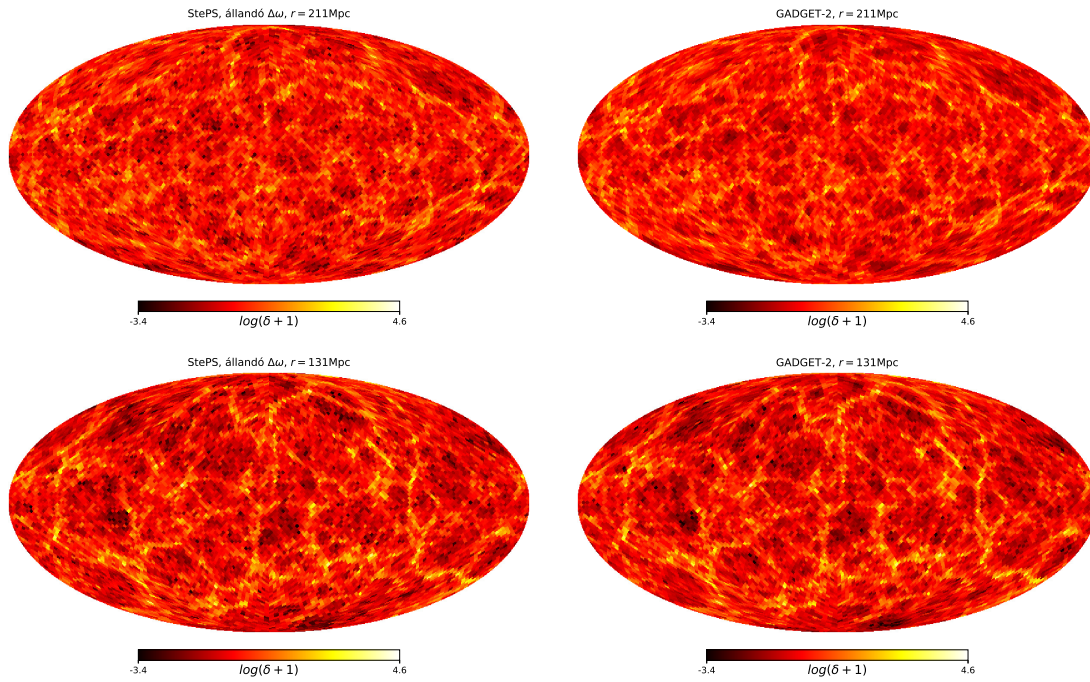
StePS szimulációt használtam, mivel ez volt mentes leginkább a látható műtermékektől. A két módszerrel előállított részecskeeloszlások összehasonlításához elsőként adott $r = \{131Mpc; 211Mpc\}$ sugarú, $\Delta r = \{30Mpc; 40Mpc\}$ véges vastagságú gömbhéjakra kiszámított gömbi-teljesítményspektrumokat használtam, mivel ezek jól illeszkednek az új szimulációs módszerhez és a megfigyelések geometriájához [7]. Az összehasonlítást a HEALPix könyvtár segítségével végeztem el. Első lépésben $N_{\text{side}} = 32$ nagyságú térképeket állítottam elő a *GADGET-2* és a *StePS* szimulációból. A gömbök középpontjai azonosak voltak, és egybeestek a StePS szimuláció középpontjával. A számított HEALPix térképek a 6.4



6.3. ábra. A részecskék eloszlása $z = 0$ -ban, az állandó $\Delta\omega$ felosztás (**Bal**) és állandó V_{bin}^{comp} felosztású (**Jobb**) kezdeti feltételből indított szimuláció esetén. A felső sorban a teljes szimulációs térfogathoz kivágott szelet, míg az alsó sorban a jó felbontású régió struktúrái láthatók. A kezdeti vöröseltolódás mindkét esetben $z_{start} = 63$ volt.

ábrán láthatók.

A térképekből a HEALPIX *anafast* függvény segítségével a 3.26 képletben definiált $a_{lm}(r, \Delta r)$ együtthatókat meghatároztam, majd a szokásos módon, a 3.27 képlettel számítottam ki a $C_l(r, \Delta r)$ gömbi teljesítményspektrumot. A kiszámított spektrumok a 6.5 ábrán láthatók. Ezek a spektrumok igen jó egyezést mutatnak, a relatív eltérésük lényegesen kisebb volt, mint a spektrumokon lévő zaj. Ez azt jelenti, hogy a nagy skálákon a két módszer eredménye közel azonos.

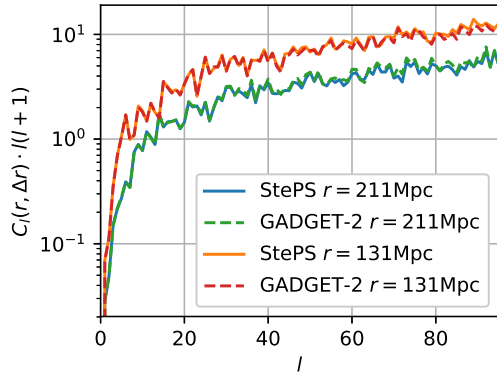


6.4. ábra. A *StePS* (bal) és *GADGET-2* (jobb) kozmológiai szimulációs kóddal lefuttatott szimulációkhoz tartozó, $r = 211\text{Mpc}$ és $r = 131\text{Mpc}$ sugárnál kivágott, $\Delta r = 40\text{Mpc}$ és $\Delta r = 30\text{Mpc}$ vastagságú gömbhéjak.

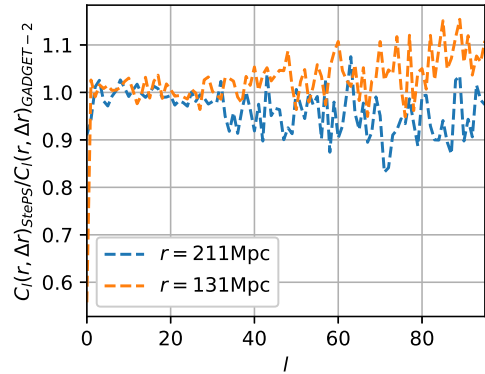
Hogy a kis skálákon is összehasonlíthassam a két szimulációt, a *StePS* szimuláció belső, konstans felbontású régiójára és az ennek megfelelő, *GADGET-2*-vel számított térrészre meghatároztam a teljesítményspektrumot. A kivágott gömb sugara $82,25\text{Mpc}$ volt. Mivel a kivágott térfogatok nem periodikusak, ezért a közvetlenül kiszámított spektrum a valódi spektrum és az ablakfüggvény konvolúciója. Erre egy régóta ismert, egyszerű korrekciót használtam. Ennek lényege, hogy a $W(\mathbf{x})$ ablakfüggvény

$$\hat{W}_{\mathbf{k}} = \int W(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (6.1)$$

Fourier-transzformáltját egyszerűen le kell vonni a sűrűségmező $\delta_{\mathbf{k}}$ Fourier-transzformáltjából a Fourier-térbeli átlagolás előtt, hogy megkapjuk a térrészre vonatkozó spektrumot [81]. Ez a módszer csak igen egyszerű ablakfüggvények esetén használható. A két szimulációból számított spektrum a 6.6 ábrán látható. A spektrumok szinte minden k érték esetén 1%-on belül megegyeznek, a $k = 0,5\text{Mpc}^{-1}$ módust leszámítva, ahol az eltérés 1,5%. Érdeemes megjegyezni, hogy az itt bemutatott spektrumok nem a teljes Univerzumra, hanem csak erre a



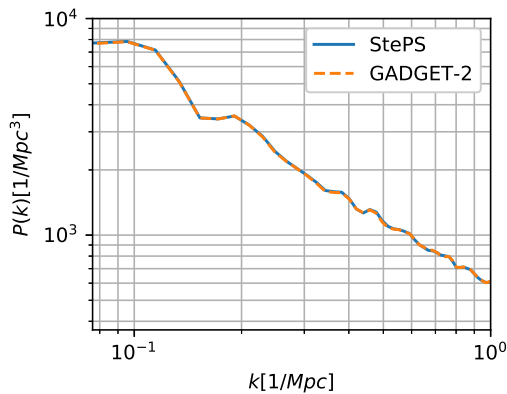
(a) A számított gömbi teljesítményspektrum.



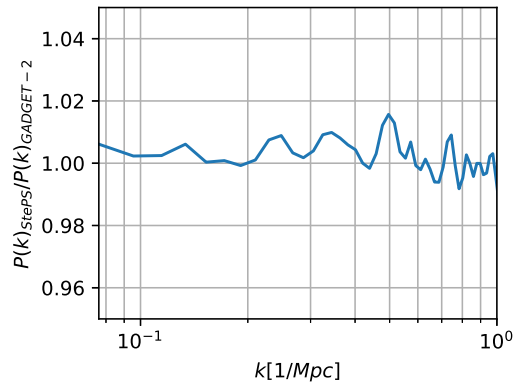
(b) A gömbi teljesítményspektrumok hányadosa.

6.5. ábra. A *StePS* és *GADGET-2* szimulációs programmal számított gömbi $C_l(r, \Delta r) \cdot l(l+1)$ teljesítményspektrumok. Láthatóan jól egyezik a két módszer eredménye, a relatív eltérés mindenhol kisebb, mint a spektrumon lévő zaj.

kicsi térrészre vonatkoznak, és tartalmazzák az ablaknál nagyobb módusok torzító hatását.



(a) A számított teljesítményspektrum.



(b) A teljesítményspektrumok hányadosa.

6.6. ábra. A *StePS* és *GADGET-2* szimulációs programmal számított teljesítményspektrum egy 82,25Mpc sugarú gömbön belüli tartományról. Láthatóan jól egyezik a két módszer eredménye, a relatív eltérés mindenhol kisebb, mint 2%.

6.2. A Millennium-szimuláció megismétlése

Miután megbizonyosodtam arról, hogy a *StePS* szimulációs algoritmus kisebb felbontású szimulációk esetén visszaadja a hagyományos *GADGET-2* program eredményeit, a Millennium

szimuláció megismétlését StePS algoritmussal tűztem ki célul. Az eredeti szimuláció $\approx 10^{10}$ részecskét tartalmazott egy $500\text{Mpc}/h$ élhosszúságú periodikus térfogatban. Ez a térfogat túl kicsi ahhoz, hogy közvetlenül StePS algoritmussal futtassunk benne szimulációt, mivel a StePS algoritmus használatának az egyik feltétele az, hogy a szimulációs térfogaton túli térrész homogénnek legyen tekinthető. Ezért a térfogatot periodikusan megismételttem minden irányban, és egy ebből kivágott, $R_{\text{sim}} = 684,9\text{Mpc}$ sugarú térfogatban futtattam a szimulációt. Ezzel nem csak a térfogatát növeltem meg a szimulációnak, hanem a periodikus határfeltételből eredő árapály-erőket is megfelelően figyelembe tudtam venni. A kezdeti üveg egy $N = 1,17 \cdot 10^7$ részecskét tartalmazó, konstans $\Delta\omega$ felosztással előállított háromdimenziós gömbi üveg volt $r_c = 45\text{Mpc}$, $N_{\text{shell}} = 12288$, $N_{\text{radial}} = 2400$, és $D_S = 25\text{Mpc}$ paraméterekkel. Ebből az üvegből, és a publikusan nem elérhető **L-GenIC** a program felhasználásával állítottam elő a kezdeti feltételt. Erre a programra azért volt szükség, mert az eredeti Millennium szimuláció kezdeti feltételét is ezzel állították elő, így ugyanazokat a fluktuációkat a sűrűségmezőben csak ezzel a programmal voltam képes legenerálni. A kapott kezdeti feltétel térbeli felbontása a belső régióban $\approx 1,6$ -szer volt rosszabb, mint az eredeti szimulációé, viszont a teljes térfogata több mint négyszerese lett [62].

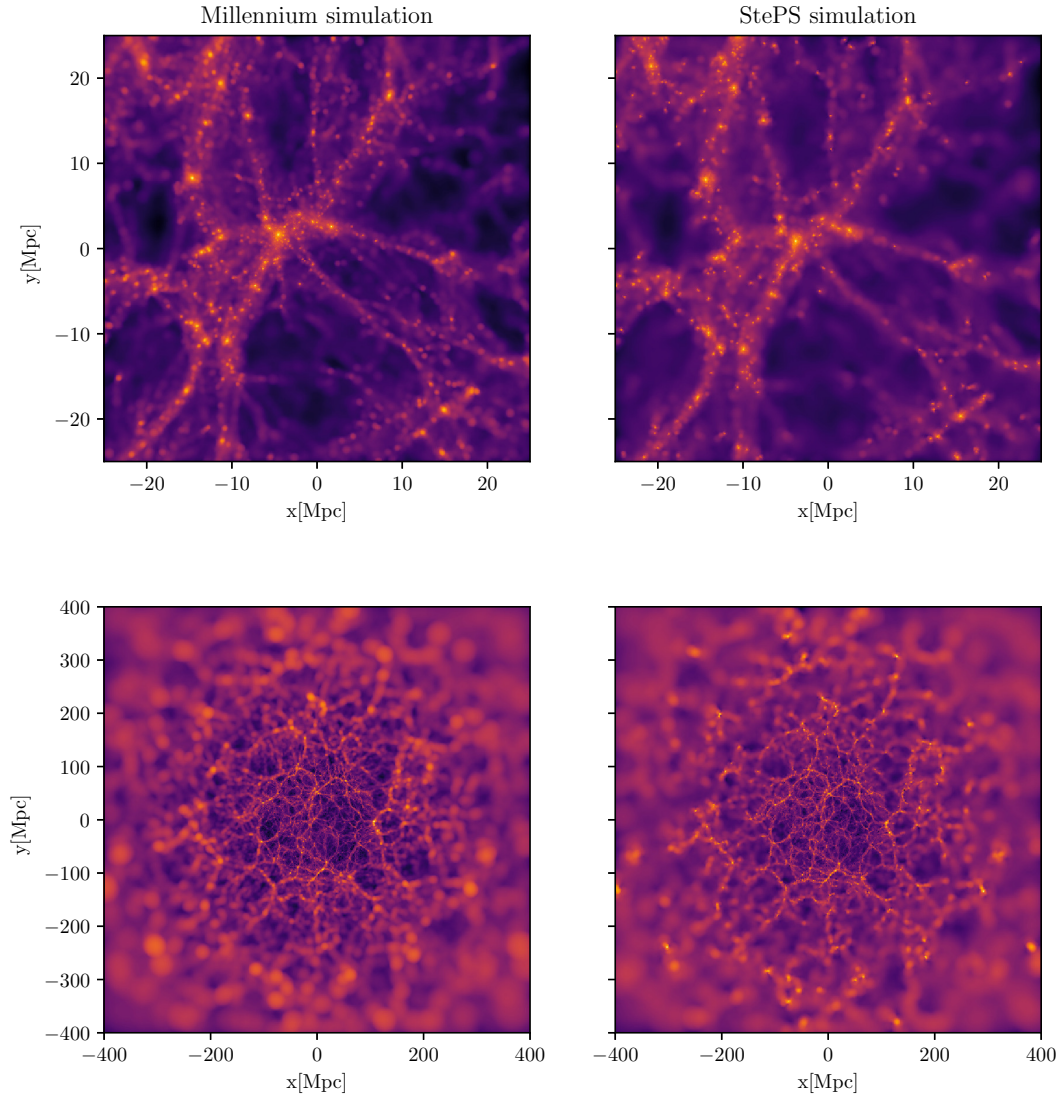
Az eredeti Millennium szimulációt egy IBM p690 típusú szuperszámítógépen futtatták 512 processzoron, és a szükséges futási idő 28 nap volt. A StePS szimulációt a MTA Wigner Fizikai Kutatóközpont GPU laborjának három szervertől futtattam, melynek mindegyike 4 darab NVIDIA GTX 1080ti grafikus kártyát tartalmazott. A direkt erőszámítást használó StePS szimuláció 106 óra alatt futott le, ami hozzávetőlegesen 4,5 nap. Az erőszámítás memóriaigénye az új szimulációnak 0,034%-a volt az eredeti szimulációénak, így könnyedén el tudott férni ez az adat az erőszámítást végző grafikus kártyák igen gyors memóriájában. Egy adott időpontban kimentett pillanatkép a szimulációról 405MB nagyságú volt, szemben az eredeti 301GB-al. Összesen 218db pillanatképet írtam ki, ami 3,4-szer több, mint az eredeti szimuláció által előállított 64 pillanatkép, így ezzel az új szimulációban sokkal jobb időfelbontásban vizsgálható a struktúrák fejlődése a kiválasztott jó felbontású térfogatban. Míg az eredeti Millennium szimulációból kimentett adat összesen $\approx 20\text{TB}$, addig a StePS megismétlése csupán 87GB. Ez lehetővé teszi a szimulációs adatok sokkal könnyebb és gyorsabb megosztását más kutatókkal. A két szimuláció összehasonlítása a 6.2 táblázatban

olvasható.

	Millennium	StePS
Ω_m	0,25	
Ω_Λ	0,75	
H_0 [km/s/Mpc]	73,0	
σ_8	0,9	
z_{start}	127	
lineáris méret [Mpc]	$L_{\text{box}} = 684,9$	$R_{\text{sim}} = 684,9$
szimulált térfogat [Gpc^3]	0,321	1,35
Részecskeszám	$1,01 \times 10^{10}$	$1,17 \times 10^7$
Részecsketömeg [M_\odot]	$1,2 \times 10^9$	$5,2 \times 10^9$ - 10^{14}
Erőszámítás	$\mathcal{O}(N \log N)$	$\mathcal{O}(N^2)$
Memória használat [GB]	$\approx 1,000$	0,342
Számítógépek száma	512 (CPU)	12 (GPU)
Szimulációs idő [h]	683	106

6.2. táblázat. A Millennium szimuláció és a StePS megfelelőjének paraméterei.

A két szimuláció végállapotáról készült vizualizáció a 6.7 ábrán látható. A könnyebb összehasonlítás érdekében a 4.4.1 alfejezetben bemutatott kompaktifikációs módszerrel a Millennium szimuláció végállapotának felbontását azonosra állítottam, mint a lefutott StePS szimulációé volt. A radiális felosztások száma 2400 volt, míg a gömbhéjak felosztásához a HEALPix felosztást alkalmaztam $N_{\text{side}} = 32$ paraméterrel. Jól láthatóan azonos struktúrák fejlődtek ki mindkét szimulációban, és a kialakult klaszterek egyesével megfeleltethetők egymásnak a jó felbontású régióban. A külső régiókban, ahol kisebb a felbontás úgy tűnhet, hogy StePS esetén élesebbek a struktúrák. Ez annak tudható be, hogy a felbontás megváltoztatása és az időfejlődés nem felcserélhető egymással.



6.7. ábra. A sötét anyag eloszlásának vizualizációja a Millennium szimuláció **(bal)**, és a StePS megismétlése **(jobb)** esetén, $z = 0$ állapotban. A könnyebb összehasonlítás céljából a Millennium szimuláció végállapotát többször periodikusan megismételtem, és a felbontását utólagosan kompaktifikációs módszerrel azonosra állítottam, mint StePS szimuláció felbontása. A sűrűségmező szelet vastagsága mindkét esetben 10Mpc volt.

7. fejezet

A Hubble-állandó vizsgálata StePS szimulációkkal

A 2.4.4 alfejezetben bemutatott, a Hubble-állandóra vonatkozó feszültséget a CMB és a lokális mérések között okozhatja a mérések valamelyikében lévő szisztematikus hiba. Ilyen hibákat okozhat a nagyskálás szerkezet az Ia szupernóva felmérések esetén. A lokális sűrűség és sebességmező hatását a Hubble-állandóra több kutatás is vizsgálta a megfigyelések [84; 20], és a periodikus szimulációk irányából [90; 50] is. Ebben a fejezetben bemutatom, hogy a StePS szimulációk segítségével könnyen modellezhetők a lokális megfigyelések, és meghatározható belőlük a Hubble-állandó mérésének nagyskálás szerkezetből eredő bizonytalansága.

7.1. Lefuttatott szimulációk

A Hubble-állandó mérésének modellezésére egy új, hat szimulációból álló sorozatot futtattam le. A részecskeszám mindegyik szimuláció esetén $6,5 \cdot 10^6$ volt, és 2,0Gpc átmérőjű volt a szimulációs térfogat. A $z = 0$ állapot mellett kimentettem a teljes éggömbre vonatkozó vöröseltolódás-kúpot is. Mindkét sorozat esetén a 2015-ös Planck kozmológiai paramétereket használtam. A szimulációk paramétereit a 7.1 táblázatban foglaltam össze.

szimulációk száma	6
kiírt állapot	$z = 0$ és vöröseltolódás-kúp
Kozmológiai paraméterek	Planck 2015
H_0 [km/s/Mpc]	67,74
z_{start}	63
IC típusa	3D gömbi üveg
Radiális felosztás módja	állandó $\Delta\omega$
r_c [Mpc]	100,0
R_S [Mpc]	42,5
R_{sim} [Mpc]	1000,0
N_{radial}	1000
szimulált térfogat [Gpc^3]	4,19
Részecskeszám	$6,5 \times 10^6$
Részecsketömeg [M_\odot]	$1,21 \times 10^{11}$ - $6,84 \times 10^{14}$

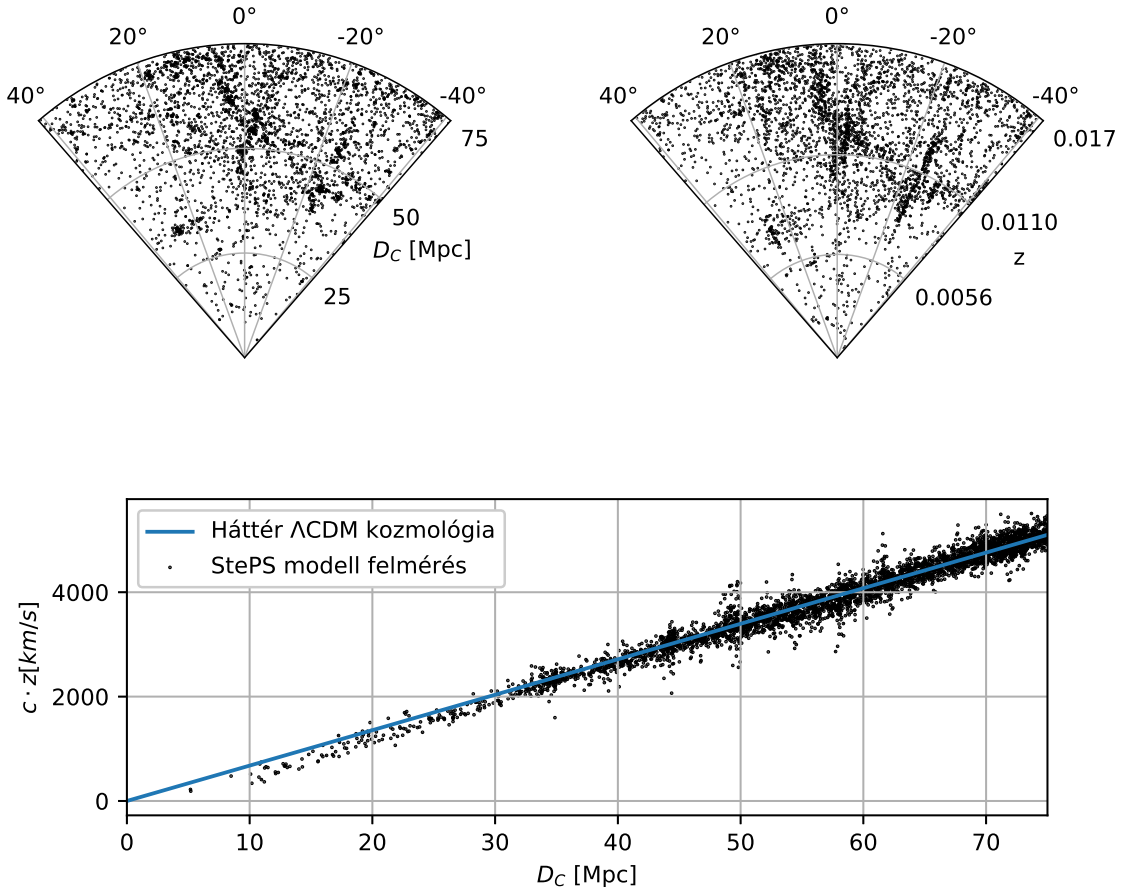
7.1. táblázat. A lokális Hubble-állandó mérések modellezéséhez használt szimulációk paramétereit.

7.2. Lokális struktúrák hatása a Hubble-állandó mérésére

A különböző kozmikus felmérések a legritkább esetben vonatkoznak a teljes éggömbre, a Tejút által kitakart tartományok és a használt távcsövek elhelyezkedése és érzékenysége kijelöl egy véges térfogatot, amiben a keresett objektumoknak meghatározzák a szükséges tulajdonságait és pozícióját. A vizsgált objektumok száma függ a megfigyelés időtartamától, például az Ia típusú szupernóvák gyakorisága kis vöröseltolódásokon $\approx 4 \cdot 10^{-5} \text{yr}^{-1} \text{Mpc}^{-3}$ [47], így minél tovább tart és minél nagyobb térfogatot vizsgál egy felmérés, annál több objektum távolsága és vöröseltolódása határozható meg.

A lokális nagyskálás szerkezetből eredő pekuliáris mozgások eltorzíthatják a megfigyeléseket. Itt ezt a torzítást fogom modellezni StePS szimulációk segítségével. A többi mérési bizonytalansággal, mint például a szupernóvák kalibrálásából vagy az extincióból eredő hibákkal itt nem foglalkozom. Hogy modellezsem a fent említett megfigyeléseket, a lefuttatott StePS szimulációkban kijelöltem megfigyelési térfogatokat, és ezekben határoztam meg a részecskék távolságuk és sajátmozgásuk figyelembevételével a Hubble-diagramot, és így Hubble-állandót. A szimulált katalógusok egy adott tengely körül értelmezett kúpok voltak, melynek csúcsába helyeztem a megfigyelőt. A megfigyelések térfogatát két paraméterrel jellemeztem, a kúp nyílásszögével, és a felmérés mélységével, azaz azzal a távolsággal vagy vöröseltolódással, ameddig még észlelhetők a keresett objektumok. A megfigyelési kúpok csúcsa mindig a StePS

szimuláció középpontja volt, és a tengely mindig párhuzamos volt az előre kijelölt, egymásra merőleges x , y , és z tengelyekkel. Így szimulációnként legfeljebb 6, egymással nem átfedő megfigyelési kúpot kaptam minden α nyílásszög és R_{survey} megfigyelési mélység párra.



7.1. ábra. Egy, a 7.1 táblázatban leírt, StePS szimulációból kapott vöröseltolódás-kúpból előállított modell megfigyelés. A kijelölt térfogat mélysége 75Mpc volt, és az éggömb 1/8-át fedte le. A megfigyelés összesen 5000, a 7.1 képlet segítségével kiválasztott részecskét tartalmazott. A részecskeszám azért ilyen nagy, hogy könnyen láthatók legyenek a nagyskálás torzítások. **Fent:** A megfigyelt részecskék eloszlása, radiális irányban az együttmozgó távolság és a vöröseltolódás alapján ábrázolva. **Lent:** Az előállított Hubble-diagram.

Mivel a keresett objektumok gyakorisága követi a sűrűségmezőt, például galaxisokban látjuk a szupernóvákat, ezért a megfigyelések jól modellezhetők úgy, hogy a szimuláció részecskéiből választunk N_{chosen} darabot véletlenszerűen. Mivel a térbeli felbontás a StePS szimulációkban csökken a megfigyelőtől távolodva, ezért a részecskék kiválasztáskor figyelembe kell venni a részecskék tömegét. Ezt súlyozott visszatevés nélküli mintavételezéssel valósítottam

meg, ahol a részecskékhez tartozó súly a tömegük volt. Minden megfigyelési térfogat esetén addig választottam ki a részecskéket, amíg számuk elérte az előírt N_{chosen} számot. Egy kiválasztás esetén az i indexű részecskének a kiválasztási valószínűsége

$$P_i = \frac{m_i}{m_{\text{tot, ns}}} \quad (7.1)$$

volt, ahol m_i a részecske tömege és $m_{\text{tot, ns}}$ a megfigyelési térfogatban lévő, még ki nem választott részecskének az összegzett tömege. Mivel a szimulációk együttmozgó koordinátákban futottak, így a kiválasztott részecskék megfigyelőtől számított együttmozgó

$$D_{C,i} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \quad (7.2)$$

távolsága adott volt. Az i részecskékhez tartozó vöröseltolódás két részből tevődött össze: a $z_{\text{cosmo},i}$ kozmológiai vöröseltolódásból, és a részecskék a Hubble-áramláshoz viszonyított mozgásából adódó $z_{\text{pec},i}$ pekuliáris vöröseltolódásból. A $z_{\text{cosmo},i}$ -t a 2.32 képlet invertálásával számítottam, továbbá a részecskék pekuliáris mozgásából adódó vöröseltolódást a

$$z_{\text{pec},i} = \sqrt{\frac{1 + v_{\text{pec},i}/c}{1 - v_{\text{pec},i}/c}} - 1, \quad (7.3)$$

relativisztikus képlettel határoztam meg minden részecskére, ahol c a fénysebesség és $v_{\text{pec},i}$ a részecske sebességvektorának a megfigyelés irányával párhuzamos komponense. Egy, a fent leírt a kiválasztási módszerrel kapott megfigyelési kúp látható a 7.1 ábrán. Itt $N_{\text{chosen}} = 5000$ volt, hogy könnyen megfigyelhetők legyenek a nagyskálás sebességmező által okozott torzítások: ebben a speciális esetben a részecskék kollektív pekuliáris mozgása miatt a $D_C < 30 Mpc$ tartományon a háttérkozmológiából vártnál kisebb sebességgel távolodnak, továbbá a klaszterek a vöröseltolódás-térben a megfigyelő irányába elnyúlnak. Az utóbbi megnyúlást nevezzük "Isten ujjai" effektusnak. A Hubble-állandó illesztésénél felhasznált szimulált katalógusokban lényegesen kevesebb, $N_{\text{chosen}} = 300$ kiválasztott részecske volt, mivel a jelenlegi Ia szupernóvákat használó Hubble-állandó mérések is ennyi objektumot használnak fel [66].

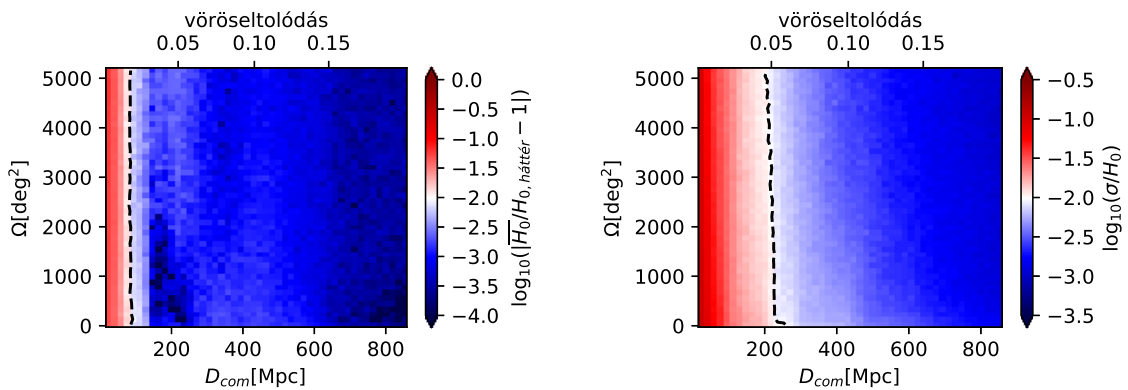
Mivel a szimulált katalógusokban priori ismert a háttérkozmológia, ezért a Hubble-állandó illesztésekor a luminozitástávolságok helyett együttmozgó távolságok is használhatók. A megfigyelt térfogatok előállítását után meghatároztam a $H_{0,j}$ Hubble-állandót úgy, hogy a felmérést alkotó részecskéknél a megfigyelőtől mért együttmozgó távolságát és vöröseltolódását illesztettem a 2.32 függvény inverzével minden j indexű felmérés esetén. Minden azonos nyílásszögű és mélységű kúpból meghatározott Hubble-állandóból kiszámítottam az ilyen geometriájú felméréshez tartozó

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_j^{N_{\text{survey}}} (H_{0,j} - \overline{H_0})^2}{N_{\text{survey}} - 1}} \quad (7.4)$$

szórást, ahol N_{survey} a független, azonos paraméterekkel rendelkező kúpok száma, $H_{0,j}$ a j -edik ilyen kúpból számított Hubble-állandó nagysága, és

$$\overline{H_0} = \frac{\sum_j^{N_{\text{survey}}} H_{0,j}}{N_{\text{survey}}} \quad (7.5)$$

a megfigyelésekből számított átlagos Hubble-állandó. Összesen 48 különböző mélységet és 48 kúpnyílásszöget vizsgáltam meg. Az illesztett $\overline{H_0}$ Hubble-állandó várható értéke és 1σ bizonytalansága a felmérés területének és mélységének függvényében látható a 7.2 ábrán.



7.2. ábra. A vöröseltolódás-kúpból előállított, szimulált katalógusokból számított eredmények a felmérés területe és mélységének függvényében. **Bal:** Az illesztett $\overline{H_0}$ Hubble-állandó várható értéke. **Jobb:** Az 1σ becsült elvi minimum hiba. A piros tartományok az 1%-nál nagyobb, a kék tartományok az 1%-nál kisebb értékeket, a szaggatott vonalak az 1%-hoz tartozó kontúrt jelölik.

Az előállított ábrán szaggatott vonallal választottam el azt a két tartományt, ahol a nagyskálás fluktuációk hatására kialakuló 1σ bizonytalanság 1% feletti illetve alatti. Ahogy az várható volt, minél nagyobb égterületre terjed ki egy megfigyelés, annál kisebb a bizonytalansága a megfigyeléseknek. A megfigyelések mélységének van a legnagyobb hatása Hubble-állandó bizonytalanságára: a ≈ 100 négyzetfoknál nagyobb, és néhány száz Mpc-nél mélyebb felmérések esetén a nagyskálás fluktuációk hatására kialakuló 1σ bizonytalanság 1% alatti. Az 1% hibához tartozó 1σ elvi minimum hiba értéke $0,01 \cdot H_0 \simeq 0,677 \text{ km/s/Mpc}$. Ez azt jelenti, hogy 2016-ban, a Planck-féle $H_{0,Planck} = 67,74 \text{ km/s/Mpc}$ és a $H_{0,local} = 73,24 \text{ km/s/Mpc}$ között a nagyskálás fluktuációkból eredő 8σ eltérés volt, ha 1% az elvi minimális hiba. Ez az érték még nagyobb, ha a 2019-es adatokat helyettesítjük be. Figyelembe véve, hogy Riess és munkatársai által az elsődleges illesztéshez használt ≈ 300 Ia szupernóva a $z < 0,15$ tartományban volt [66], és hogy a modern Ia szupernóva megfigyelési programok legalább 300 deg^2 égterületet vizsgálnak, a 7.2 ábráról leolvasható, hogy ez a tartomány jóval az 1% alatti régióba esik. Ezek alapján kijelenthető, hogy a ΛCDM modellel konzisztens nagyskálás fluktuációkkal nem magyarázható a lokális mérések és a kozmikus mikrohullámú háttérből meghatározott Hubble-állandókban tapasztalt ellentmondás. A StePS szimulációkból számított, a nagyskálás sebességmezőből eredő bizonytalansága H_0 -nak összhangban van a korábbi, kisebb periodikus szimulációkból kapott eredményekkel [50].

Az itt bemutatott módszer természetesen igen sok irányba továbbfejleszthető. Például, a galaxisok skálájánál nagyobb részecskék vöröseltolódásához még egy további véletlen tagot hozzá lehet rendelni, mert ezek klasztereket reprezentálnak, és ezeken belül a galaxisoknak van egy véges sebességeloszlásuk. Ezzel feltehetően csökkenni fog az előző bekezdésben kiszámított feszültség, de várhatóan így sem lehet feloldani az ellentmondást. Másik lehetőség, hogy nem véletlenszerűen választott koordinátákra helyezzük a StePS szimuláció középpontját, hanem egy előzetesen lefuttatott, kis felbontású szimuláció alapján választjuk ki a megfigyelő környezeteket. Itt lehet átlagos sűrűségű, esetleg a Tejút környezetének megfelelő tiszta közép-pontokat választani. A harmadik lehetséges módosítás, hogy a szimulált térfogatban azonosított halókból választjuk ki a standard gyertyák koordinátáit véletlenszerűen. Ezeknek az eseteknek a vizsgálata túlmutat ennek a disszertációnak a keretein.

8. fejezet

A nagyskálás szerkezet visszahatása a tágulásra

Az előző fejezetben bemutattam, hogy a Λ CDM kozmológiával konzisztens struktúrákkal nem magyarázható a Hubble-állandó mérésében tapasztalt ellentmondás. Ebben a fejezetben áttekintem a Λ CDM-en túlmutató kozmológiai visszahatás-modellek alapgondolatait. Ezek olyan modellek, amik kozmológiai állandó nélkül képesek gyorsuló tágulást mutatni. Ezek a standard modellhez hasonló, ám attól mégis különböző tágulási történeteket jósolnak, így lehetséges, hogy ezek segítségével feloldható a Hubble-feszültség.

A 2. fejezetben bemutatott standard kozmológiai modell úgy származtatja a metrika tágulását leíró egyenleteket, hogy az Einstein-egyenletekre egzakt homogenitást és izotrópiát feltételez. A nagyskálás felmérések nyilvánvalóvá tették, hogy ezt a feltételezést sértik az Univerzumunkban látható struktúrák. A valódi Univerzumban a kozmikus sűrűségmező értéke igen nagy tartományok között változik, így legfeljebb statisztikus homogenitásról beszélhetünk. Az Einstein-egyenletek nemlinearitásából következik, hogy máshogyan tágul egy egzaktul homogén univerzum egy olyanhoz képest, ahol csak statisztikus homogenitás van. Ez a tény már régóta ismert, viszont ennek az effektusnak a nagysága vitatott. A kialakuló struktúrák visszahatását a tágulás dinamikájára nevezzük *kozmológiai visszahatás*nak. Az általános vélekedés az, hogy a struktúrák hatása a teljes Univerzum tágulására elhanyagolható, tehát helyes a friedmanni kép, és a Λ CDM modell [30; 31]. Ez mellett a leggyakrabban felhozott érv, hogy a kicsi pekuliáris sebességek és kis gravitációs terek miatt elegendő newtoni határesetet vizsgálni, és

mivel ebben a képben nincs kozmológiai visszahatás, ezért a valódi Univerzumban sem lesz [41]. A kozmológusok egy kisebb csoportja [10] úgy gondolja, hogy a késői időkben ($z < 10$) ez a hatás mégis jelentős lehet. Ez mellett érv, hogy a megfigyelésekre illesztett Λ CDM modellekben a 2.23 képlettel definiált időfüggő $\Omega_\Lambda(t)$ értéke és a kozmológiai állandó nélküli EdS szimulációkban a virializálódott anyag mennyisége között azonos vöröseltolódások esetén szoros kapcsolat van [67]. Tehát a visszahatás-modellek irányából nézve Ω_Λ úgy viselkedik, mintha egy korrekció lenne, ami figyelembe veszi a sűrűség-ingadozások effektív hatását a friedmanni képben.

A vita végleges eldöntéséhez meg kellene oldani az inhomogén Einstein egyenleteket, ami igen nehéz feladat. Giblin és munkatársai 2016-ban numerikusan, bizonyos közelítések mellett megoldották ezeket az egyenleteket, és a késői időkben nagyobb inhomogén tágulási hatásokat mértek, mint amit a lineáris elméletek jósoltak [27]. Az a tény, hogy a Λ CDM modell jóslatai egyeznek a legtöbb megfigyeléssel arra utal, hogy az ilyen hatást tartalmazó modellek ehhez igen hasonló tágulási történetet kell mutatniuk, ha meg akarják magyarázni a megfigyeléseket.

A késői időkben történő nem lineáris fejlődés kezelése numerikus relativitáselméletben nehézkes, ezért több közelítést is javasoltak a kozmológiai visszahatás figyelembevételére. Buchert és munkatársai [8; 9] megmutatták, hogy a kozmológiai visszahatás megérthető az Einstein-egyenletek megfelelő átlagolásával. Az általuk kidolgozott formalizmusban a Friedmann-egyenletekkel analóg egyenletek írják le egy inhomogén térrész tágulását az univerzumban. A tágulást az

$$a_{\mathcal{D}}(t) = \left(\frac{V_{\mathcal{D}}(t)}{V_{\mathcal{D}}(t_0)} \right)^{1/3}, \quad (8.1)$$

effektív skálafaktor írja le, ahol $V_{\mathcal{D}}(t)$ a t időpontban, és $V_{\mathcal{D}}(t_0)$ egy t_0 kezdeti időpontban a térrész térfogata. Az effektív skálafaktorra vonatkozó

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = -4\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + \Lambda + \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \quad (8.2)$$

$$3 \left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 = 8\pi G \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + \Lambda - \frac{1}{2} \langle {}^{(3)}R \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \quad (8.3)$$

$$\partial \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} = -3 \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} \quad (8.4)$$

Buchert-egyenletekkel meghatározható az inhomogén térrész átlagos tágulása, ahol a $\langle \dots \rangle_{\mathcal{D}}$ jeles az ezen a térfogaton belüli átlagolást jelenti, ${}^{(3)}R$ a skalár görbület, és $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ a kinematikai

visszahatás tag. Ez tartalmazza az inhomogenitások és az anizotrópia járulékait. Ezeknek az egyenleteknek másodrendű perturbatív megoldását találták meg Kolb és munkatársai [42] valamint Räsänen [63]. Ezeken túl Wiltshire adott rájuk analitikus megoldást egy kétskálájú (fal és üreg) közelítés esetén [87; 88; 89]. Roukema és munkatársai a Buchert-egyenleteket vizsgálva virializációs közelítésben megmutatták, hogy ezek kozmológiai állandó nélkül gyorsuló tágulást tudnak mutatni [67].

A következő fejezetekben egy nem perturbatív, több-skálás statisztikus közelítést mutatok be a kozmológiai visszahatásra, ami az általános relativitáselméletből ismert önállóuniverzum-sejtésen alapul. A bemutatott módszer nem megoldása az általános relativitáselméletnek, csupán egy játékmódel, amin keresztül vizsgálhatók a visszahatás-modellek.

8.1. A önállóuniverzum-sejtésen alapuló inhomogén tágulási modell

A önállóuniverzum-sejtés kimondja, hogy egy homogén univerzumba ágyazott, gömbszimmetrikus, $\delta + 1$ sűrűségű régió úgy tágul, mint egy $\delta + 1 = \Omega_m$ kozmológiai sűrűségparaméterrel rendelkező különálló Univerzum [83]. A sejtést Dai, Pajer, és Schmidt bizonyította [14], és széles körben alkalmazott kvázi-newtoni közelítésben [5; 45; 48].

A kozmológiai N-test szimulációk a newtoni mozgásegyenleteket integrálják időben változó FRW metrika mellett, aminek $a(t)$ skálafaktorát kívülről állítják be. Ahhoz, hogy egyetlen skálár paraméterrel jellemezzük a metrikát, átlagolást kell alkalmazni. Erre két módszert mutatok be:

Hagyományos feltevés: A hagyományos szimulációk a Friedmann-egyenleteket használják a metrika skálaparaméterének kiszámítására adott időpontra. Ebben az esetben a Friedmann-egyenletekbe a teljes Univerzumra vonatkozó átlagos sűrűségparamétereket helyettesítjük be. Ez formálisan úgy is tekinthető, hogy minden lépésben átlagoljuk a sűrűséget a szimulált térfogatban, majd léptetjük a metrikára vonatkozó egyenleteket. Egy ilyen átlagolás esetén a kialakuló struktúrák nem képesek visszahatni a tágulás dinamikájára.

A tágulási ráta átlagolt megközelítése (Average Expansion Rate Approximation – AvE-RA): Ebben a közelítésben minden időlépésben kis térfogatokra felosztjuk a szimulációt, majd

$$\left\langle \begin{matrix} \Omega_{m,1} \\ \Omega_{m,2} \\ \dots \\ \Omega_{m,N} \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \boxed{\text{Friedmann egy.}} \Rightarrow \Delta V \Rightarrow a(t + \delta t) \quad (8.5)$$

$$\begin{matrix} \Omega_{m,1} \\ \Omega_{m,2} \\ \dots \\ \Omega_{m,N} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\text{Friedmann egy.}} \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \dots \\ \Delta V_N \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow a(t + \delta t) \quad (8.6)$$

8.1. ábra. **Fent:** A hagyományos kozmológiai N-test szimulációk a Friedmann-egyenleteket használják az átlagsűrűséggel a tágulás dinamikájának meghatározásához. Mivel a teljes tömeg állandó, így az $a(t)$ skálafaktor független a sűrűségmező ingadozásaitól. **Lent:** AvERA közelítésben a teljes szimulációs térfogatot kitöltő cellákban, egymástól függetlenül határozzuk meg minden lokális mini-univerzumra a térfogat megváltozását. Ezt felösszegezve határozzuk meg minden lépésben a globális skálafaktor megváltozását.

a önállóuniverzum-sejtést felhasználva minden kis térfogatnak külön meghatározzuk a relatív tágulását a Friedmann-egyenletek felhasználásával. A önálló részek tágulásait összegezzük, hogy megkapjuk a teljes szimulációra vonatkozó térfogatnövekményt, és így a skálafaktor megváltozását. Ilyen átlagolás mellett lehetséges a kialakuló struktúrák visszahatása a tágulás dinamikájára, és egzakt homogén esetben visszakapjuk a friedmanni tágulási történetet. Ez az átlagolási módszer valójában a térbeli átlagolás és az időléptetés felcserélése. A hagyományos és az AvERA átlagolás összehasonlítása látható a 8.1 ábrán.

A fentiek alapján látható, hogy ha egy szimuláció AvERA átlagolást használ, akkor minden lépésben a diszkrét részecskeeloszlásból rekonstruálni kell a sűrűségmezőt. Erre a célra gyakran használt megoldás a DTFE (Delaunay Tessellation Field Estimation) módszer [69], melynek lényege, hogy a részecskékhez tartozó Delaunay-háromszögelés segítségével tetraéderekre osztjuk a szimulációs térfogatot. Ebben a felosztásban a lokális sűrűség fordítottan arányos a négy háromszög által határolt cella térfogatával. A módszer nagy előnye, hogy a sűrűségmező előállításához nincs szükség külső paraméterek beállítására, mint például a simítási hossz.

A modell teszteléséhez írtam egy periodikus kozmológiai N-test programot [60]. A program a 3.1 alfejezetben bemutatott simítást, erőszámítást, és a 5.1 alfejezetben leírt KDK N-test integrátort használja. Az egyetlen lényeges különbség a hagyományos periodikus N-test szimulációs programhoz képest az AvERA átlagolási módszer használata. A program minden időlépésben

DTFE módszerrel meghatározza a sűrűségmezőt, majd a sűrűségmező minden cellájában a lokális

$$\Omega_{m,\mathcal{D}} = \frac{\rho_{\mathcal{D}}}{\rho_{c,0}}, \quad (8.7)$$

átlagos sűrűség felhasználásával a kozmológiai állandó nélküli

$$H_{\mathcal{D}} = \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = H_0 \sqrt{\Omega_{m,\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^{-3} + (1 - \Omega_{m,\mathcal{D}}) a_{\mathcal{D}}^{-2}}. \quad (8.8)$$

lokális Friedmann egyenlet segítségével meghatározza a lokális az $a_{\mathcal{D}}(t)$ skálafaktort és a $H_{\mathcal{D}}(t)$ Hubble paramétert mindegyik lokális univerzum esetén. Megjegyzendő, hogy a 8.7 és 8.8 egyenlet azonos a newtoni gömbi kollapszus egyenleteivel. Ezek meglepően pontos leírását képesek adni a teljes dinamikának [48], és az alapjai sok egyéb sikeres közelítésnek, mint például a haló modelleknek, és a Press–Schechter formalizmusnak.

A lineáris tágulás köbe a térfogati tágulás, statisztikus izotrópiát feltételezve. A cellák határán lévő határfeltételeket elhanyagolva¹ a cellák térfogat növekedését összegezve megkapható a teljes szimulációs kocka térfogatának megváltozása. Ezek alapján egy \mathcal{D} indexű cellához tartozó skálafaktor Buchert által megadott módon, a 8.1 egyenlet alapján írható fel. Könnyen belátható, hogy a teljes dobozra értelmezett $a(t)$ skálafaktort a $V_{tot}(t)$ fizikai koordinátákban mért szimulációs térfogattal az

$$a(t) = a(t) = \left(\frac{V_{tot}(t)}{V_{tot}(t_0)} \right)^{1/3} \quad (8.9)$$

képlet kapcsolja össze. A cellák

$$V(t) = \sum_{\mathcal{D}} V_{\mathcal{D}}(t) \quad (8.10)$$

össztérfogata adja a teljes szimulációs doboz térfogatát, Ezek alapján a teljes térfogatra vonatkozó skálafaktor az

$$a(t) = \left(\frac{\sum_{\mathcal{D}} V_{\mathcal{D}}(t)}{V(t_0)} \right)^{1/3} \quad (8.11)$$

képlettel számítható a kis cellák térfogatából. A szimulációkban a részecskék a globális ská-

¹ Mivel ez csupán egy játékmodell, ezért itt feltételezem, hogy meg lehet tenni ezt az elhanyagolást.

lafaktor által meghatározott FRW-metrikában mozognak. Minden léptetésnél a program meghatározza a cellákban lévő sűrűséget, majd a Δt lépéshosszhoz tartozó $\Delta a_{\mathcal{D}}$ skálafaktor megváltozást a 8.8 lokális Friedmann-egyenletből. Ennek ismeretében a következő lépés a cella térfogatának

$$\Delta V_{\mathcal{D}}(\Delta t) = V_{\mathcal{D}}(t)[(a(t) + \Delta a_{\mathcal{D}})^3 - a^3(t)] \quad (8.12)$$

megváltozása. Ezután ki kell számítani a teljes térfogatra vonatkozó Δa skálafaktor-megváltozást. Felhasználva, hogy a szimulációs doboz térfogata fizikai koordinátákban

$$V(t) = a^3(t)V(t_0) \quad (8.13)$$

belátható, hogy globálisan sík univerzumban

$$\Delta a = \left(\sum_{\mathcal{D}} \frac{\Delta V_{\mathcal{D}}(\Delta t)}{V(t)} + a^3(t) \right)^{1/3} - a(t). \quad (8.14)$$

Tehát $t + \Delta t$ -ben az effektív skálafaktor a következő alakot ölti:

$$a(t + \Delta t) = \left(\frac{\sum_{\mathcal{D}} \Delta V_{\mathcal{D}}(\Delta t)}{V(t)} + a^3(t) \right)^{1/3} \quad (8.15)$$

Utolsó lépésként ebből meg kell határozni numerikus deriválással a

$$H(t + \Delta t) = \left[\frac{a(t + \Delta t) - a(t)}{\Delta t} \right] \frac{1}{a(t + \Delta t)} \quad (8.16)$$

Hubble-paramétert.

Látható, hogy az AvERA-átlagolás esetében elhanyagoljuk a cellákon kívülről érkező árpály erőket, és feltételezzük, hogy a gömbi kollapszus egyenletei nem gömb alakú cellákra is alkalmazhatók. A statisztikus közelítés miatt feltételezzük, hogy nem szükséges a szomszédos cellákhoz tartozó tér-idő régiók összekapcsolását. A tágulási rátát átlagoljuk minden lépésben, így a sebességek és távolságok homogén módon skálázódnak az egész szimulációs térfogatban, hasonlóan a hagyományos közelítéshez. Így minden időlépéshez a szimuláció minden pontjában azonos kozmikus idő és vöröseltolódás tartozik.

Az átlagolás skálája ebben a modellben egy szabad paraméter, ami megadja hogy mekkora tömegű cellákat használ a modell a gömbi kollapszus számításánál. Mivel az általam írt program DTFE-módszerrel számítja a sűrűségmezőt, ez a paraméter az adott szimuláció tömegfelbontása.

Ez a skála a modell egy szabad paramétere: ha végtelen nagyságúra állítjuk, visszakapjuk a hagyományos átlagolási módszert, ha viszont túl kicsi az értéke, akkor olyan kicsi, virializáltak tekinthető térfogatokra is alkalmaznánk a gömbi kollapszusok egyenleteit, amikre már biztosan nem érvényesek. Valahol ennek a két szélsőség között érdemes vizsgálni ennek a paraméternek a hatását a globális skálafaktor időfüggésére. Mivel ez a skála a szimuláció minden pontjában azonos, ezért szükséges állandó felbontás és így a periodikus határfeltételek használata.

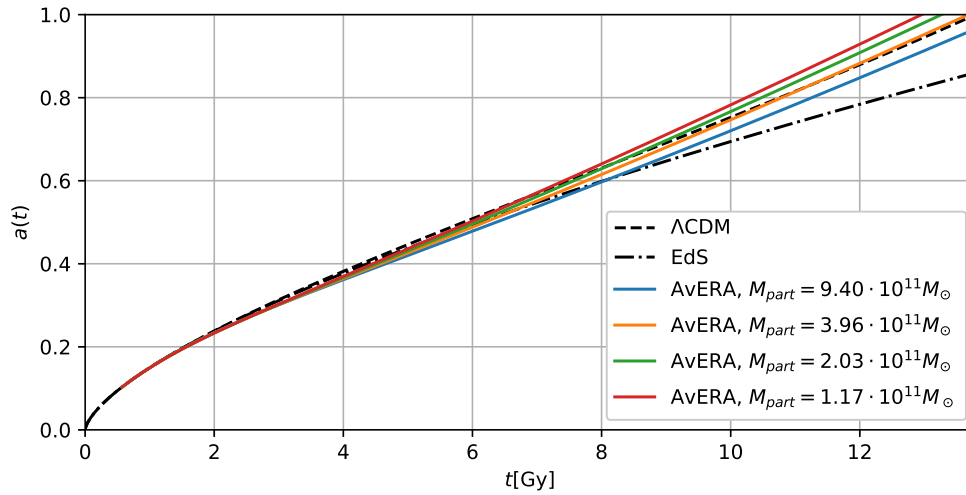
8.2. Lefuttatott visszahatás szimulációk

A programommal szimulációk sorozatát futtattam le $1,17 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ és $M = 9,40 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ közötti, térben állandó tömegfelbontással hagyományos és AvERA tágulási modellben. Minden szimuláció egy $147,62^3 \text{ Mpc}^3$ térfogatú, periodikus dobozban történt. Mivel a korábbi visszahatás-modellek késői vöröseltolódásra jósoltak jelentős effektust, ezért a szimulációimat $z = 9$ vöröseltolódásról indítottam. Ezen a vöröseltolódáson a 2.3b ábra alapján a standard Λ CDM modellben a kozmológiai állandó hatása elhanyagolható, ezért mindkét modellben a kozmikus mikrohullámú háttértől a kezdeti vöröseltolódásig a tágulás dinamikája várhatóan megegyezik, és kellő pontossággal leírható EdS modellel. A 2.19 Friedmann-egyenlet alapján a tágulás sebessége a standard Λ CDM paramétereket felhasználva ezen a vöröseltolódáson $H(z = 9) = 1191,9 \text{ km/s/Mpc}$. A visszahatás-modellek azt jósolják, hogy Λ nélkül is lehetséges a gyorsuló tágulás, így ebben az állapotban Ω_{Λ} értékét zérusra, míg Ω_m értékét egységre állítottam. Ez $\approx 0,3\%$ -al növelte összesen az anyagsűrűséget az új modellben a hagyományoshoz képest. Mivel a tágulás dinamikája a kezdeti vöröseltolódásig mindkét modellben megegyezik, és a teljes tömegben igen kicsi a különbség, ezért a két típusú szimulációhoz azonos tömegfelbontás esetén azonos kezdeti feltételeket használtam. A kezdeti feltételeket a 2LPTic [12] programmal állítottam elő standard Λ CDM paraméterekkel, így a 3.8 képletben definiált σ_8 értékét is az ennek a modellnek megfelelő extrapolációval állítottam be. A két modell kezdeti állapotát a 8.1 táblázatban foglaltam össze.

Paraméter ($z = 9$)	Λ CDM szimulációk	AvERA és EdS szimulációk
H [km/s/Mpc]	1191,9	1191,9
Ω_m	0,9978	1,0
Ω_r	0,0	0,0
Ω_Λ	0,0022	0,0
Ω_k	0,0	0,0

8.1. táblázat. A $z = 9$ kezdeti vöröseltolódáson az időfüggő kozmológiai paraméterek a 2.21 és 2.23 képletek alapján, a két különböző tágulási modellt használó szimulációk esetén. Ebből az állapotból indultak a szimulációk mindkét esetben.

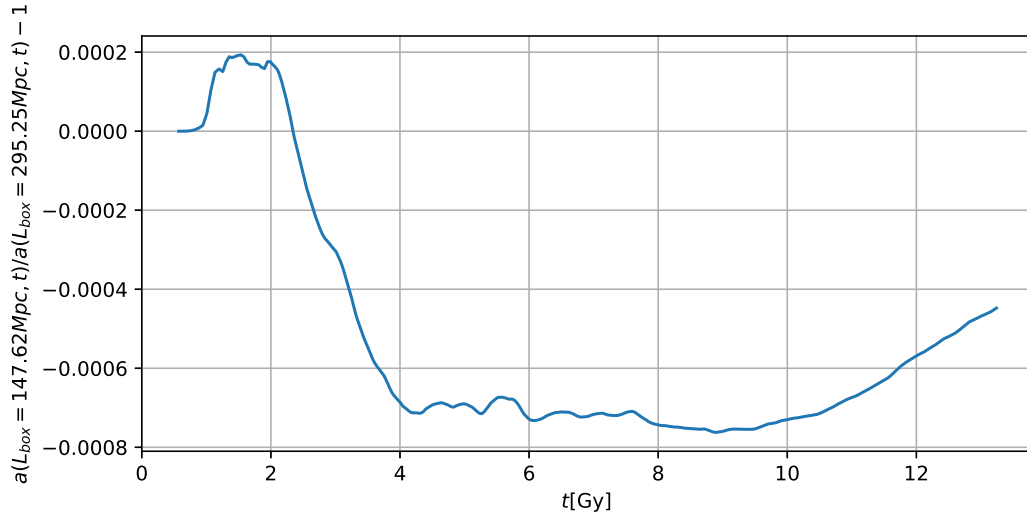
A szimulációkból kapott skálafaktorok a 8.2 ábrán láthatók. Összehasonlításukért meghatároztam a szimulációkhoz tartozó kezdeti tágulási sebességhez tartozó EdS dinamikát, és ezt is feltüntettem az ábrákon. Az ehhez tartozó Hubble-állandó értéke $37,69 \text{ km/s/Mpc}$. A korábbi visszahatás-modellekkel összhangban az AvERA szimulációkban a skálafaktor időfejlődése valóban közelebb áll a Λ CDM modelléhez, mint az EdS dinamikához. A visszahatás-modellek szerint a sűrűségmezőben kialakuló kozmikus üregek időben előre haladva egyre nagyobb arányban töltik ki az univerzumot, tehát egyre inkább ezek dominálják a tágulás dinamikáját.



8.2. ábra. Az AvERA szimulációkból meghatározott skálafaktorok időfüggése különböző átlagolási skála esetén. Az ábrán feltüntettem a standard Λ CDM és EdS modellek skálafaktorát.

Hogy megbizonyosodjak arról, hogy a túl kicsi szimulációs dobozméret nem okozott jelentős hibát, a mérésekre $M_{part} = 2,03 \cdot 10^{11} M_\odot$ átlagolási skálával rendelkező szimuláció paramétereivel lefuttattam egy nyolcszor nagyobb térfogatú szimulációt. A két szimulációból

kapott effektív skálafaktorának hányadosa látható a 8.3 ábrán. A két szimulációból kapott skálafaktorok közötti eltérés kisebb, mint $0,8\%$, tehát a periodicitás és a kis szimulációs térfogat ebben a modellben nem okoz jelentős eltéréseket, így a további kiértékelésekhez a fent bemutatott kisebb térfogatú szimulációkat használtam.



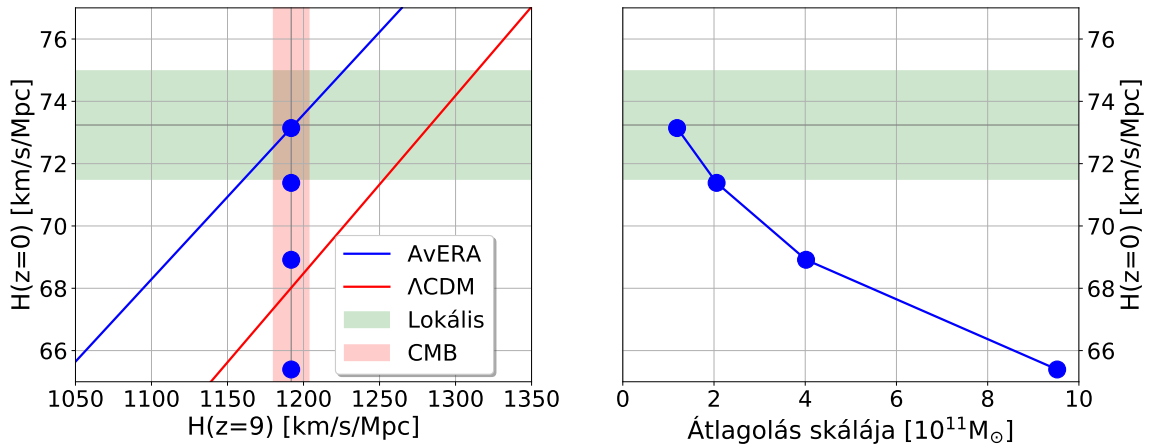
8.3. ábra. Két azonos kozmológiai paraméterekkel rendelkező AvERA szimuláció skálafaktorainak hányadosa. A két szimuláció csak a lineáris dobozméretben tért el, a nagyobb méretű szimuláció nyolcszor nagyobb térfogatban futott. Az ábráról leolvasható, hogy az eltérés a két szimuláció skálafaktorában kisebb, mint $0,8\%$

8.3. A Hubble-állandó meghatározása az AvERA modellben

Az AvERA szimulációk során a kezdeti $z = 9$ tágulási sebességet a kozmikus mikrohullámú megfigyelésekkel konzisztens értékre állítottam be, és az átlagolási skálától függően más és más értéket kaptam az univerzum korára és Hubble-állandóra. A kezdeti és végállapotot, valamint az átlagolási skálát a 8.4 ábrán mutatom be. Látható, hogy míg a hagyományos Λ CDM modell rögzített sűrűségparaméterek mellett, csak H_0 szabad paraméter mellett nem képes feloldani a lokális és CMB mérések közötti ellentmondásokat, addig a megfelelően megválasztott átlagolási skálával rendelkező AvERA szimuláció igen. A 8.2 táblázatban feltüntettem a végállapotban kapott Hubble-állandókat. Látható, hogy $M_{\text{part}} = 1,17 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ átlagolási skála esetén $H_0 = 73,1 \text{ km/s/Mpc}$, ami konzisztens a lokális $(73,24 \pm 1,74) \text{ km/s/Mpc}$ Riess-féle értékkel.

Részecskeszám	$M_{part} [10^{11} M_{\odot}]$	H_0 [km/s/Mpc]
135.000	9,40	65,4
320.000	3,96	68,9
625.000	2,03	71,4
1.080.000	1,17	73,1

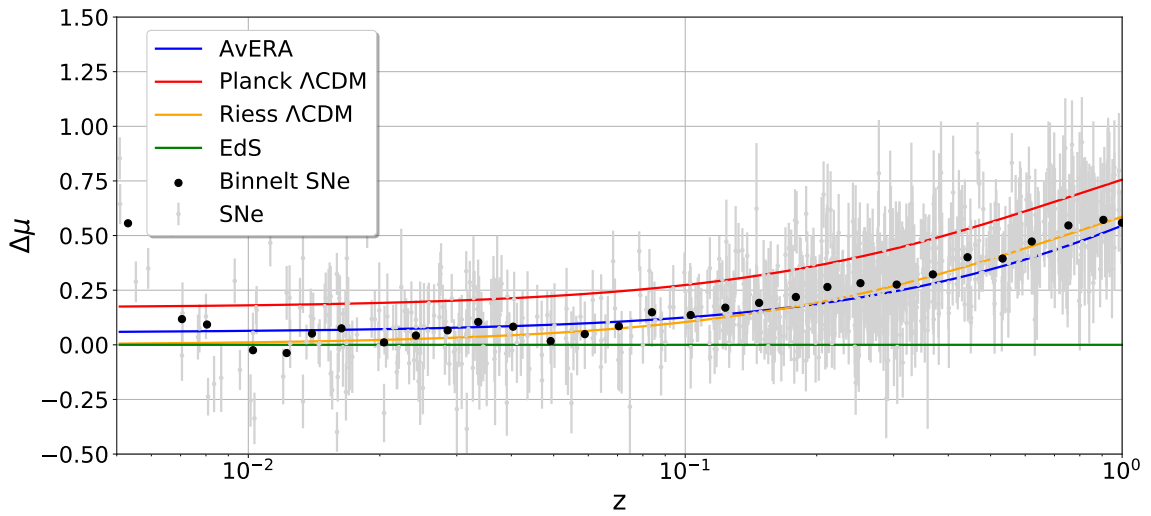
8.2. táblázat. Összefoglaló táblázat a különböző AvERA szimulációk bemenetéről, és a végállapotban mért H_0 Hubble-állandóról. Mindegyik esetben a periodikus doboz mérete $L = 147,62$ Mpc, és a kezdeti tágulási sebesség $H(z = 9) = 1191,9$ km/s/Mpc volt. Ez az érték konzisztens a CMB mérésekre legjobban illeszkedő Planck Λ CDM paraméterekkel.



8.4. ábra. **Bal:** A $z = 0$ -hoz tartozó Hubble-állandó, és a $z = 9$ állapotban értelmezett Hubble-paraméter által kifeszített sík. A vízszintes tengellyel párhuzamos sáv a Riess és munkatársai által meghatározott [66] lokális Hubble-állandóhoz tartozó 1σ tartomány. A vörös sáv a CMB mérésekből [56] meghatározott tágulási sebesség 1σ bizonytalansága a $z = 9$ állapotban. A Λ CDM model (piros vonal) nem képes egyszerre megmagyarázni a két mérést, míg az AvERA modell képes erre (kék vonal) megfelelő átlagolási skála mellett. **Jobb:** Az AvERA szimulációkban a tágulás mai sebessége és az átlagolási skála közötti kapcsolat a CMB mérésekkel konzisztens $H(z = 9)$ kezdeti tágulási sebesség esetén.

Az első és legerősebb bizonyítékot az univerzum gyorsuló tágulására az Ia típusú szupernóvákból számított távolságmodulus mérések szolgáltatták [65; 54; 71]. Mivel a luminositástávolság alacsony vöröseltolódáson csak enyhén függ a görbülettől, ezért a 2.38 és 2.39 képletekkel az AvERA szimulációkból számított $H(z)$ felhasználásával meghatároztam az új modellhez tartozó távolságmodulust. A 8.5 ábrán a Hubble-feszültséget feloldó paraméterekkel rendelkező AvERA modell mellett feltüntettem a Planck, illetve ezekre a lokális megfigyelésekre Riess és munkatársai által illesztett Λ CDM modellt. Mind a Λ CDM, mind az AvERA modellek jelentősen eltérnek az EdS modelltől, és mindegyik gyorsuló tágulást mutat. Mindegyik modell esetén kiszámítottam, hogy az általuk jósolt távolságmodulus-görbék

mennyire térnek el a mért adatpontok. A Planck illetve a Riess-féle Hubble-állandóval és standard sűrűségparaméterekkel rendelkező Λ CDM görbékre rendre $\chi^2_{Planck} = 2486,6$ $\chi^2_{Riess} = 1301,1$ értékeket, míg az AvERA szimulációra $\chi^2_{AvERA} = 1347,9$ -et kaptam. Tehát az AvERA szimuláció közel olyan jól képes illeszkedni a szupernóva mérésekhez, mint az ezekhez illesztett Λ CDM modell úgy, hogy közben konzisztens a kozmikus mikrohullámú háttérből meghatározott korai időszakra vonatkozó tágulási sebességekkel.



8.5. ábra. A $\Delta\mu = DM - DM_{EdS}$ relatív távolságmodulus a vöröseltolódás függvényében. A zöld vonal felel meg a referencia EdS univerzumnak. Pirossal a Planck [56], míg arany színű vonallal a Riess-féle Hubble-állandóval [66] és standard paraméterekkel rendelkező Λ CDM modellt ábrázoltam. Hibákkal együtt szürkével jelöltem a szupernóvákból megfigyelt értékeket. Ezeket a SuperCal szupernóva gyűjteményből [71; 72] vettem, és feketével jelöltem a vöröseltolódás-binekből vett átlagos értéküket. Az $M_{part} = 1,17 \cdot 10^{11} M_{\odot}$ simítási skálájú AvERA szimulációt kékkkel jelöltem. Látható, hogy ez a kozmológiai állandó nélküli modell különbözik a hagyományos EdS modelltől, és közel olyan jól illeszkedik a mérésekre, mint a lokális mérésekre illesztett Λ CDM model.

Az AvERA modellel így demonstráltam, hogy a Λ CDM-re igen hasonlító, de attól kis mértékben eltérő tágulási dinamika képes feloldani az ellentmondást a lokális és a kozmikus mikrohullámú háttéren alapuló Hubble-állandó mérések között, és illeszkedhet a szupernóva mérésekre. Mivel nem a hagyományos friedmanni képből áll elő a tágulás dinamikája, ezért itt a globális sűrűségekből, a 2.21-2.24 képletekből számított mai Ω sűrűségértékek csak effektív értékek, és nincs meg az az erős fizikai jelentésük, mint a hagyományos képben. Így a 2.20 képlet alapján számított igen nagy görbületi paraméter sem jelent valós globális görbületet. Bár

az AvERA csupán egy játékmodell, a Hubble-feszültség feloldása arra utalhat, hogy érdemes a kozmológiai visszahatás-modellek további vizsgálata.

9. fejezet

Összefoglalás

Az Univerzum nagyskálás szerkezetének fejlődésének vizsgálata igen fontos a modern kozmológiában. A szimulációkból kapott struktúrák nem csupán arra alkalmasak, hogy a csillagászati megfigyelésekkel összevetve meghatározzuk a kozmológiai paramétereket, hanem arra is, hogy megbecsüljük a nagyskálás sűrűségmezőből és sebességterekből eredő hibáit a különböző kozmológiai felmérési programoknak. A ma használt legtöbb ilyen szimuláció periodikus határfeltételt használ egyszerűségük miatt, de ilyen periodicitást a megfigyelések nem mutatnak.

Az értekezésemben áttekintettem a standard kozmológiai modellt, és az általánosan használt módszereket a kozmológiai struktúráképződés modellezésére. Kidolgoztam új numerikus módszereket a kozmológiai struktúráképződés modellezésére, és tanulmányoztam a kozmológiai visszahatást. Bemutattam egy új, nem periodikus szimulációs módszert, és a grafikus kártyákra optimalizált implementációját. A szimulációs programom forráskódját szabadon hozzáférhetővé tettem. Az új szimulációs módszernek igen sok előnye van a hagyományos szimulációkkal szemben:

1. A szimulációban nincsenek kitüntetett irányok, és így valódi newtoni erő hat a részecskék között
2. A végtelen topológiája a szimulációnak megegyezik a megfigyelésekkel

3. Igen könnyű a teljes éggömbre vöröseltolódás-kúpokat készíteni
4. Megfelelően választott kompaktifikáció mellett kevés, néhány millió részecskével is igen nagy felbontás érhető el a szimuláció közepén
5. A kicsi részecskeszám miatt a szimulációk eredményei nagyságrendekkel kisebb fájlokba menthetők ki
6. A különböző módusok szimulálása sokkal kiegyensúlyozottabb, mint periodikus esetben: a kis skálás fluktuációkat egy kisebb térfogatban modellezi, míg a nagyobb, lineáris módusokat kevesebb részecskével, nagyobb térfogatban.

Természetesen nem csak előnyei vannak az új módszernek: mivel a felbontás nem állandó mindenhol, mások a szisztematikus effektusok, amikhez meg kell találni a megfelelő korrekciókat. A szimulációk kiértékelése így eltér a periodikus, konstans felbontású szimulációktól.

Megismételtem az új algoritmussal a klasszikus Millennium szimulációt, ezzel bebizonyítva, hogy helyes eredményt ad a program illetve a módszer, és visszakapható belőle bármely periodikus sötét anyag szimuláció eredménye. Bemutattam a Hubble-állandó példáján keresztül, hogy miként lehet a StePS szimulációkkal a kozmológiai megfigyeléseket modellezni, és azt, hogy a lokális mérésekből számított kozmológiai paraméterek nagyskálás szerkezetből eredő hibáját hogyan lehet megbecsülni. Megmutattam, hogy a standard kozmológiai modellel konzisztens nagyskálás fluktuációk nem tudják megmagyarázni a lokális és a kozmikus mikrohullámú háttéren alapuló Hubble-állandó-mérésekben tapasztalt ellentmondást.

Az értekezés utolsó részében bemutattam az alternatív kozmológiai modellek egy osztályát, a kozmológiai visszahatást. Leírtam egy néhány egyszerű feltételezésen alapuló modellt a kozmológiai visszahatás modellezésére, és megmutattam, hogy ebben lehetséges a gyorsuló tágulás kozmológiai állandó nélkül. Ezen túl a modell azt is megmutatta, hogy a standard kozmológiai modelltől kis mértékben eltérő tágulási történet megmagyarázhatja a Hubble-állandó mérésében tapasztalt ellentmondásokat.

Summary

Understanding how the large scale structure of the Universe grows and evolves is a key problem in modern cosmology. The structures obtained from cosmological simulations are not only suitable for determining cosmological parameters by comparing them with astronomical observations, but also can be used for estimating uncertainty in different cosmological surveys. Virtually every the simulation uses periodic boundary conditions to approximate the infinite volume outside the simulation box. These assumptions are a matter of convenience and contradict fundamental observations.

In my dissertation, I reviewed the standard cosmological model and the commonly used methods for modeling the cosmological structure formation, I have introduced new numerical methods for modelling the structure formation, and I have studied the cosmic backreaction. I proposed a new non-periodic simulation method and its implementation optimized for graphics cards. The simulation code is freely available. The new method has numerous advantages over the traditional methods: (i) the novel algorithm has a strict Newtonian force law without any large scale modifications; (ii) it has a topology that is consistent with observations; (iii) it is perfectly suited for creating redshift-cones; (iv) it uses small particle numbers, but very high resolutions can be achieved in the center of the simulations; (v) due to the small number of particles; the results of these simulations can be saved into orders of magnitude smaller snapshots than in traditional simulations; (vi) while standard simulations develop too many high- k modes and too few low k ones, my algorithm has a better balance.

I have re-simulated the Millennium Run with my new program to demonstrate that it can reproduce the results of any periodic dark matter simulation. I have shown how one can use the StePS simulations to estimate the effects of the large scale structures on the supernova Ia measurements, assuming Λ CDM cosmology, and I reproduced the results of the earlier periodic studies, i.e. the Hubble-tension cannot be resolved by large scale fluctuations that are consistent with the Λ CDM cosmology.

In the last part, I reviewed the basic ideas of the cosmological backreaction models, and I proposed a simple approach to model strong backreaction based on the separate universe conjecture. I have shown, that accelerating expansion is indeed possible in this backreaction model, and I demonstrated that an alternative cosmological model with a similar, but slightly

different expansion history to Λ CDM can resolve the Hubble-tension.

Irodalomjegyzék

- [1] Akitsu, K. and Takada, M. (2018). Impact of large-scale tides on cosmological distortions via redshift-space power spectrum. Phys. Rev. D, 97(6):063527.
- [2] Alpher, R. A., Bethe, H., and Gamow, G. (1948). The Origin of Chemical Elements. Physical Review, 73(7):803–804.
- [3] Alpher, R. A. and Herman, R. C. (1949). Remarks on the Evolution of the Expanding Universe. Physical Review, 75:1089–1095.
- [4] Barnes, J. and Hut, P. (1986). A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. NATURE, 324:446–449.
- [5] Bernardeau, F. (1994). The nonlinear evolution of rare events. ApJ, 427:51–71.
- [6] Bond, J. R., Centrella, J., Szalay, A. S., and Wilson, J. R. (1984). Dark matter and shocked pancakes. In Audouze, J. and Tran Thanh Van, J., editors, NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C, volume 117, page 87.
- [7] Bonvin, C. and Durrer, R. (2011). What galaxy surveys really measure. Phys. Rev. D, 84(6):063505.
- [8] Buchert, T. (2000). On Average Properties of Inhomogeneous Fluids in General Relativity: Dust Cosmologies. General Relativity and Gravitation, 32:105–126.
- [9] Buchert, T. (2001). On Average Properties of Inhomogeneous Fluids in General Relativity: Perfect Fluid Cosmologies. General Relativity and Gravitation, 33:1381–1405.
- [10] Buchert, T., Carfora, M., Ellis, G. F. R., Kolb, E. W., MacCallum, M. A. H., Ostrowski, J. J., Räsänen, S., Roukema, B. F., Andersson, L., Coley, A. A., and Wiltshire, D. L. (2015).

- Is there proof that backreaction of inhomogeneities is irrelevant in cosmology? Classical and Quantum Gravity, 32(21):215021.
- [11] Colless, M. (1999). First results from the 2dF Galaxy Redshift Survey. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, 357(1750):105.
- [12] Crocce, M., Pueblas, S., and Scoccimarro, R. (2006). Transients from initial conditions in cosmological simulations. MNRAS, 373(1):369–381.
- [13] Cui, W., Liu, L., Yang, X., Wang, Y., Feng, L., and Springel, V. (2008). An Ideal Mass Assignment Scheme for Measuring the Power Spectrum with Fast Fourier Transforms. APJ, 687(2):738–744.
- [14] Dai, L., Pajer, E., and Schmidt, F. (2015). On separate universes. J. Cosmology Astropart. Phys., 10:059.
- [15] Dehnen, W. (2001). Towards optimal softening in three-dimensional N-body codes - I. Minimizing the force error. MNRAS, 324(2):273–291.
- [16] Dodelson, S. (2003). Modern cosmology. Academic Press.
- [17] Eastwood, J. W., Hockney, R. W., and Lawrence, D. N. (1984). P3M3DP-the three-dimensional periodic particle-particle/particle-mesh program. Computer Physics Communications, 35.
- [18] Einstein, A. (1915). Die Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 844-847.
- [19] Einstein, A. (1917). Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Seite 142-152.
- [20] Enea Romano, A. (2016). Hubble trouble or Hubble bubble? arXiv e-prints, page arXiv:1609.04081.
- [21] Ewald, P. P. (1921). Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale. Annalen der Physik, 369:253–287.

- [22] Fixsen, D. J. (2009). The Temperature of the Cosmic Microwave Background. APJ, 707(2):916–920.
- [23] Fox, R. (2018). Einstein in Oxford. Notes Rec., 72:293–318.
- [24] Freedman, W. L., Madore, B. F., Hatt, D., Hoyt, T. J., Jang, I. S., Beaton, R. L., Burns, C. R., Lee, M. G., Monson, A. J., Neeley, J. R., Phillips, M. M., Rich, J. A., and Seibert, M. (2019). The Carnegie-Chicago Hubble Program. VIII. An Independent Determination of the Hubble Constant Based on the Tip of the Red Giant Branch. ApJ, 882(1):34.
- [25] Frei, Z. and Patkós, A. (2004). Inflációs kozmológia. Typotex kiadó, Budapest.
- [26] Friedmann, A. (1922). Über die Krümmung des Raumes. Zeitschrift für Physik, 10:377–386.
- [27] Giblin, J. T., Mertens, J. B., and Starkman, G. D. (2016). Departures from the friedmann-lemaitre-robertston-walker cosmological model in an inhomogeneous universe: A numerical examination. Phys. Rev. Lett., 116:251301.
- [28] Górski, K. M., Hivon, E., Banday, A. J., Wandelt, B. D., Hansen, F. K., Reinecke, M., and Bartelmann, M. (2005). HEALPix: A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere. ApJ, 622(2):759–771.
- [29] Gorski, K. M., Wandelt, B. D., Hansen, F. K., Hivon, E., and Banday, A. J. (1999). The HEALPix Primer. arXiv e-prints, pages astro-ph/9905275.
- [30] Green, S. R. and Wald, R. M. (2014). How well is our Universe described by an FLRW model? Classical and Quantum Gravity, 31(23):234003.
- [31] Green, S. R. and Wald, R. M. (2016). A simple, heuristic derivation of our ‘no backreaction’ results. Classical and Quantum Gravity, 33(12):125027.
- [32] Gregory, S. A. and Thompson, L. A. (1978). The Coma/A1367 supercluster and its environs. ApJ, 222:784–799.
- [33] Hamuy, M., Phillips, M. M., Suntzeff, N. B., Schommer, R. A., Maza, J., and Aviles, R. (1996). The Absolute Luminosities of the Calan/Tololo Type IA Supernovae. AJ, 112:2391.

- [34] Harrison, E. R. (1967). Classification of uniform cosmological models. MNRAS, 137:69.
- [35] Hernquist, L., Bouchet, F. R., and Suto, Y. (1991). Application of the Ewald method to cosmological N-body simulations. APJS, 75:231–240.
- [36] Hubble, E. (1929). A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. Proceedings of the National Academy of Science, 15:168–173.
- [37] Huchra, J., Davis, M., Latham, D., and Tonry, J. (1983). A survey of galaxy redshifts. IV - The data. ApJS, 52:89–119.
- [38] Huchra, J. P. and Geller, M. J. (1982). Groups of Galaxies. I. Nearby groups. ApJ, 257:423–437.
- [39] Hwang, J.-c. and Noh, H. (2006). Why Newtonian gravity is reliable in large-scale cosmological simulations. MNRAS, 367(4):1515–1520.
- [40] Joyce, M., Marcos, B., and Baertschiger, T. (2009). Towards quantitative control on discreteness error in the non-linear regime of cosmological N-body simulations. MNRAS, 394(2):751–773.
- [41] Kaiser, N. (2017). Why there is no Newtonian backreaction. MNRAS, 469(1):744–748.
- [42] Kolb, E. W., Matarrese, S., Notari, A., and Riotto, A. (2005). Effect of inhomogeneities on the expansion rate of the universe. Phys. Rev. D, 71(2):023524.
- [43] Lemaître, G. (1927). Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 47:49–59.
- [44] L’Huillier, B. (2014). computePk: Power spectrum computation.
- [45] Mohayaee, R., Mathis, H., Colombi, S., and Silk, J. (2006). Reconstruction of primordial density fields. MNRAS, 365:939–959.
- [46] Monaghan, J. J. and Lattanzio, J. C. (1985). A refined particle method for astrophysical problems. AAP, 149:135–143.

- [47] Neill, J. D., Sullivan, M., Balam, D., Pritchett, C. J., Howell, D. A., Perrett, K., Astier, P., Aubourg, E., Basa, S., Carlberg, R. G., Conley, A., Fabbro, S., Fouchez, D., Guy, J., Hook, I., Pain, R., Palanque-Delabrouille, N., Regnault, N., Rich, J., Taillet, R., Aldering, G., Antilogus, P., Arsenijevic, V., Balland, C., Baumont, S., Bronder, J., Ellis, R. S., Filiol, M., Gonçalves, A. C., Hardin, D., Kowalski, M., Lidman, C., Lusset, V., Mouchet, M., Mourao, A., Perlmutter, S., Ripoche, P., Schlegel, D., and Tao, C. (2006). The Type Ia Supernova Rate at $z \sim 0.5$ from the Supernova Legacy Survey. *AJ*, 132(3):1126–1145.
- [48] Neyrinck, M. C. (2016). Truthing the stretch: non-perturbative cosmological realizations with multiscale spherical collapse. *MNRAS*, 455:L11–L15.
- [49] Oñorbe, J., Garrison-Kimmel, S., Maller, A. H., Bullock, J. S., Rocha, M., and Hahn, O. (2014). How to zoom: bias, contamination and Lagrange volumes in multimass cosmological simulations. *MNRAS*, 437(2):1894–1908.
- [50] Odderskov, I., Hannestad, S., and Haugbølle, T. (2014). On the local variation of the Hubble constant. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2014(10):028.
- [51] Peacock, J. A. (1999). *Cosmological Physics*. Cambridge University Press.
- [52] Penzias, A. A. and Wilson, R. W. (1965). A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *APJ*, 142:419–421.
- [53] Perlmutter, S., Aldering, G., Deustua, S., Fabbro, S., Goldhaber, G., Groom, D. E., Kim, A. G., Kim, M. Y., Knop, R. A., Nugent, P., Pennypacker, C. R., della Valle, M., Ellis, R. S., McMahon, R. G., Walton, N., Fruchter, A., Panagia, N., Goobar, A., Hook, I. M., Lidman, C., Pain, R., Ruiz-Lapuente, P., Schaefer, B., and Supernova Cosmology Project (1997). Cosmology From Type IA Supernovae: Measurements, Calibration Techniques, and Implications. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, volume 191 of *American Astronomical Society Meeting Abstracts*, page 85.04.
- [54] Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R. A., Nugent, P., Castro, P. G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D. E., Hook, I. M., Kim, A. G., Kim, M. Y., Lee, J. C., Nunes, N. J., Pain, R., Pennypacker, C. R., Quimby, R., Lidman, C., Ellis, R. S., Irwin, M., McMahon, R. G., Ruiz-Lapuente, P., Walton, N., Schaefer, B., Boyle, B. J., Filippenko,

- A. V., Matheson, T., Fruchter, A. S., Panagia, N., Newberg, H. J. M., Couch, W. J., and Project, T. S. C. (1999). Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *ApJ*, 517:565–586.
- [55] Pillepich, A., Nelson, D., Springel, V., Pakmor, R., Torrey, P., Weinberger, R., Vogelsberger, M., Marinacci, F., Genel, S., van der Wel, A., and Hernquist, L. (2019). First Results from the TNG50 Simulation: The evolution of stellar and gaseous disks across cosmic time. *MNRAS*, page 2024.
- [56] Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartlett, J. G., Bartolo, N., Battaner, E., Battye, R., Benabed, K., Benoît, A., Benoit-Lévy, A., Bernard, J. P., Bersanelli, M., Bielewicz, P., Bock, J. J., Bonaldi, A., Bonavera, L., Bond, J. R., Borrill, J., Bouchet, F. R., Boulanger, F., Bucher, M., Burigana, C., Butler, R. C., Calabrese, E., Cardoso, J. F., Catalano, A., Challinor, A., Chamballu, A., Chary, R. R., Chiang, H. C., Chluba, J., Christensen, P. R., Church, S., Clements, D. L., Colombi, S., Colombo, L. P. L., Combet, C., Coulais, A., Crill, B. P., Curto, A., Cuttaia, F., Danese, L., Davies, R. D., Davis, R. J., de Bernardis, P., de Rosa, A., de Zotti, G., Delabrouille, J., Désert, F. X., Di Valentino, E., Dickinson, C., Diego, J. M., Dolag, K., Dole, H., Donzelli, S., Doré, O., Douspis, M., Ducout, A., Dunkley, J., Dupac, X., Efstathiou, G., Elsner, F., Enßlin, T. A., Eriksen, H. K., Farhang, M., Fergusson, J., Finelli, F., Forni, O., Frailis, M., Fraisse, A. A., Franceschi, E., Frejsel, A., Galeotta, S., Galli, S., Ganga, K., Gauthier, C., Gerbino, M., Ghosh, T., Giard, M., Giraud-Héraud, Y., Giusarma, E., Gjerløw, E., González-Nuevo, J., Górski, K. M., Gratton, S., Gregorio, A., Gruppuso, A., Gudmundsson, J. E., Hamann, J., Hansen, F. K., Hanson, D., Harrison, D. L., Helou, G., Henrot-Versillé, S., Hernández-Monteagudo, C., Herranz, D., Hildebrandt, S. R., Hivon, E., Hobson, M., Holmes, W. A., Hornstrup, A., Hovest, W., Huang, Z., Huppenberger, K. M., Hurier, G., Jaffe, A. H., Jaffe, T. R., Jones, W. C., Juvela, M., Keihänen, E., Keskitalo, R., Kisner, T. S., Kneissl, R., Knoche, J., Knox, L., Kunz, M., Kurki-Suonio, H., Lagache, G., Lähteenmäki, A., Lamarre, J. M., Lasenby, A., Lattanzi, M., Lawrence, C. R., Leahy, J. P., Leonardi, R., Lesgourgues, J., Levrier, F., Lewis, A., Liguori, M., Lilje, P. B., Linden-Vørnle, M., López-Caniego, M., Lubin, P. M., Macías-Pérez, J. F., Maggio, G., Maino, D., Mandolesi, N., Mangilli, A., Marchini, A., Maris, M., Martin, P. G., Martinelli, M., Martínez-

González, E., Masi, S., Matarrese, S., McGehee, P., Meinhold, P. R., Melchiorri, A., Melin, J. B., Mendes, L., Mennella, A., Migliaccio, M., Millea, M., Mitra, S., Miville-Deschênes, M. A., Moneti, A., Montier, L., Morgante, G., Mortlock, D., Moss, A., Munshi, D., Murphy, J. A., Naselsky, P., Nati, F., Natoli, P., Netterfield, C. B., Nørgaard-Nielsen, H. U., Noviello, F., Novikov, D., Novikov, I., Oxborrow, C. A., Paci, F., Pagano, L., Pajot, F., Paladini, R., Paoletti, D., Partridge, B., Pasian, F., Patanchon, G., Pearson, T. J., Perdureau, O., Perotto, L., Perrotta, F., Pettorino, V., Piacentini, F., Piat, M., Pierpaoli, E., Pietrobon, D., Plaszczyński, S., Pointecouteau, E., Polenta, G., Popa, L., Pratt, G. W., Prézeau, G., Prunet, S., Puget, J. L., Rachen, J. P., Reach, W. T., Rebolo, R., Reinecke, M., Remazeilles, M., Renault, C., Renzi, A., Ristorcelli, I., Rocha, G., Rosset, C., Rossetti, M., Roudier, G., Rouillé d'Orfeuil, B., Rowan-Robinson, M., Rubiño-Martín, J. A., Rusholme, B., Said, N., Salvatelli, V., Salvati, L., Sandri, M., Santos, D., Savelainen, M., Savini, G., Scott, D., Seiffert, M. D., Serra, P., Shellard, E. P. S., Spencer, L. D., Spinelli, M., Stolyarov, V., Stompor, R., Sudiwala, R., Sunyaev, R., Sutton, D., Suur-Uski, A. S., Sygnet, J. F., Tauber, J. A., Terenzi, L., Toffolatti, L., Tomasi, M., Tristram, M., Trombetti, T., Tucci, M., Tuovinen, J., Türlér, M., Umana, G., Valenziano, L., Valiviita, J., Van Tent, F., Vielva, P., Villa, F., Wade, L. A., Wandelt, B. D., Wehus, I. K., White, M., White, S. D. M., Wilkinson, A., Yvon, D., Zacchei, A., and Zonca, A. (2016). Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *A&A*, 594:A13.

- [57] Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartolo, N., Basak, S., Battye, R., Benabed, K., Bernard, J. P., Bersanelli, M., Bielewicz, P., Bock, J. J., Bond, J. R., Borrill, J., Bouchet, F. R., Boulanger, F., Bucher, M., Burigana, C., Butler, R. C., Calabrese, E., Cardoso, J. F., Carron, J., Challinor, A., Chiang, H. C., Chluba, J., Colombo, L. P. L., Combet, C., Contreras, D., Crill, B. P., Cuttaia, F., de Bernardis, P., de Zotti, G., Delabrouille, J., Delouis, J. M., Di Valentino, E., Diego, J. M., Doré, O., Douspis, M., Ducout, A., Dupac, X., Dusini, S., Efstathiou, G., Elsner, F., Enßlin, T. A., Eriksen, H. K., Fantaye, Y., Farhang, M., Fergusson, J., Fernandez-Cobos, R., Finelli, F., Forastieri, F., Frailis, M., Fraisse, A. A., Franceschi, E., Frolov, A., Galeotta, S., Galli, S., Ganga, K., Génova-Santos, R. T., Gerbino, M., Ghosh, T., González-Nuevo, J., Górski, K. M., Gratton, S., Gruppuso, A., Gudmundsson, J. E., Hamann, J., Handley, W., Hansen, F. K., Herranz, D., Hildebrandt, S. R., Hivon, E., Huang, Z.,

Jaffe, A. H., Jones, W. C., Karakci, A., Keihänen, E., Keskitalo, R., Kiiveri, K., Kim, J., Kisser, T. S., Knox, L., Krachmalnicoff, N., Kunz, M., Kurki-Suonio, H., Lagache, G., Lamarre, J. M., Lasenby, A., Lattanzi, M., Lawrence, C. R., Le Jeune, M., Lemos, P., Lesgourgues, J., Levrier, F., Lewis, A., Liguori, M., Lilje, P. B., Lilley, M., Lindholm, V., López-Caniego, M., Lubin, P. M., Ma, Y. Z., Macías-Pérez, J. F., Maggio, G., Maino, D., Mandolesi, N., Mangilli, A., Marcos-Caballero, A., Maris, M., Martin, P. G., Martinelli, M., Martínez-González, E., Matarrese, S., Mauri, N., McEwen, J. D., Meinhold, P. R., Melchiorri, A., Mennella, A., Migliaccio, M., Millea, M., Mitra, S., Miville-Deschênes, M. A., Molinari, D., Montier, L., Morgante, G., Moss, A., Natoli, P., Nørgaard-Nielsen, H. U., Pagano, L., Paoletti, D., Partidge, B., Patanchon, G., Peiris, H. V., Perrotta, F., Pettorino, V., Piacentini, F., Polastri, L., Polenta, G., Puget, J. L., Rachen, J. P., Reinecke, M., Remazeilles, M., Renzi, A., Rocha, G., Rosset, C., Roudier, G., Rubiño-Martín, J. A., Ruiz-Granados, B., Salvati, L., Sandri, M., Savelainen, M., Scott, D., Shellard, E. P. S., Sirignano, C., Sirri, G., Spencer, L. D., Sunyaev, R., Suur-Uski, A. S., Tauber, J. A., Tavagnacco, D., Tenti, M., Toffolatti, L., Tomasi, M., Trombetti, T., Valenziano, L., Valiviita, J., Van Tent, B., Vibert, L., Vielva, P., Villa, F., Vittorio, N., Wandelt, B. D., Wehus, I. K., White, M., White, S. D. M., Zacchei, A., and Zonca, A. (2018). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. [arXiv e-prints](#), page arXiv:1807.06209.

[58] Potter, D., Stadel, J., and Teyssier, R. (2017). PKDGRAV3: beyond trillion particle cosmological simulations for the next era of galaxy surveys. *Computational Astrophysics and Cosmology*, 4(1):2.

[59] Press, W. H. and Schechter, P. (1974). Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. *ApJ*, 187:425–438.

[60] Rácz, G., Dobos, L., Beck, R., Szapudi, I., and Csabai, I. (2017). Concordance cosmology without dark energy. *MNRAS*, 469(1):L1–L5.

[61] Rácz, G., Szapudi, I., Csabai, I., and Dobos, L. (2018). Compactified cosmological simulations of the infinite universe. *MNRAS*, 477(2):1949–1957.

[62] Rácz, G., Szapudi, I., Dobos, L., Csabai, I., and Szalay, A. S. (2019). StePS: A multi-

- GPU cosmological N-body Code for compactified simulations. Astronomy and Computing, 28:100303.
- [63] Räsänen, S. (2010). Applicability of the linearly perturbed FRW metric and Newtonian cosmology. Phys. Rev. D, 81(10):103512.
- [64] Riess, A. G., Casertano, S., Yuan, W., Macri, L. M., and Scolnic, D. (2019). Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond Λ CDM. ApJ, 876(1):85.
- [65] Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Jha, S., and Kirshner, R. P. (1998). Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. AJ, 116(3):1009–1038.
- [66] Riess, A. G., Macri, L. M., Hoffmann, S. L., Scolnic, D., Casertano, S., Filippenko, A. V., Tucker, B. E., Reid, M. J., Jones, D. O., Silverman, J. M., Chornock, R., Challis, P., Yuan, W., Brown, P. J., and Foley, R. J. (2016). A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. ApJ, 826(1):56.
- [67] Roukema, B. F., Ostrowski, J. J., and Buchert, T. (2013). Virialisation-induced curvature as a physical explanation for dark energy. J. Cosmology Astropart. Phys., 2013(10):043.
- [68] Rubin, V. C. and Ford, W. Kent, J. (1970). Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. ApJ, 159:379.
- [69] Schaap, W. E. and van de Weygaert, R. (2000). Continuous fields and discrete samples: reconstruction through Delaunay tessellations. A&A, 363:L29–L32.
- [70] Schneider, A., Teyssier, R., Potter, D., Stadel, J., Onions, J., Reed, D. S., Smith, R. E., Springel, V., Pearce, F. R., and Scoccimarro, R. (2016). Matter power spectrum and the challenge of percent accuracy. J. Cosmology Astropart. Phys., 2016(4):047.
- [71] Scolnic, D., Casertano, S., Riess, A., Rest, A., Schlafly, E., Foley, R. J., Finkbeiner, D., Tang, C., Burgett, W. S., Chambers, K. C., Draper, P. W., Flewelling, H., Hodapp, K. W., Huber, M. E., Kaiser, N., Kudritzki, R. P., Magnier, E. A., Metcalfe, N., and Stubbs, C. W.

- (2015). Supercal : Cross-calibration of Multiple Photometric Systems to Improve Cosmological Measurements with Type Ia Supernovae. ApJ, 815:117.
- [72] Scolnic, D. and Kessler, R. (2016). Measuring Type Ia Supernova Populations of Stretch and Color and Predicting Distance Biases. ApJ, 822:L35.
- [73] Shapley, H. and Curtis, H. D. (1921). The Scale of the Universe. Bulletin of the National Research Council, Vol. 2, Part 3, No. 11, p. 171-217, 2:171–217.
- [74] Sirko, E. (2005). Initial Conditions to Cosmological N-Body Simulations, or, How to Run an Ensemble of Simulations. APJ, 634(2):728–743.
- [75] Smoot, G. F., Bennett, C. L., Kogut, A., Wright, E. L., Aymon, J., Boggess, N. W., Cheng, E. S., de Amici, G., Gulkis, S., Hauser, M. G., Hinshaw, G., Jackson, P. D., Janssen, M., Kaita, E., Kelsall, T., Keegstra, P., Lineweaver, C., Loewenstein, K., Lubin, P., Mather, J., Meyer, S. S., Moseley, S. H., Murdock, T., Rokke, L., Silverberg, R. F., Tenorio, L., Weiss, R., and Wilkinson, D. T. (1992). Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. APJL, 396:L1–L5.
- [76] Springel, V. (2005). The cosmological simulation code GADGET-2. MNRAS, 364:1105–1134.
- [77] Springel, V., White, S. D. M., Jenkins, A., Frenk, C. S., Yoshida, N., Gao, L., Navarro, J., Thacker, R., Croton, D., Helly, J., Peacock, J. A., Cole, S., Thomas, P., Couchman, H., Evrard, A., Colberg, J., and Pearce, F. (2005). Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. Nature, 435:629–636.
- [78] Szalay, A. S., Ellis, R. S., Koo, D. C., and Broadhurst, T. J. (1991). Analysis of the large scale structure with deep pencil beam surveys. In Holt, S. S., Bennett, C. L., and Trimble, V., editors, After the first three minutes, volume 222 of American Institute of Physics Conference Series, pages 261–275.
- [79] Thorstensen, J. R., Kurtz, M. J., Geller, M. J., Ringwald, F. A., and Wegner, G. (1995). Redshifts for Fainter Galaxies in the First CFA Slice. III. To the Zwicky Catalog Limit. AJ, 109:2368.

- [80] van Maanen, A. (1916). Preliminary evidence of internal motion in the spiral nebula Messier 101. ApJ, 44.
- [81] Vogeley, M. S. (1995). The Power Spectrum of galaxy density fluctuations: Current results and improved techniques. In Maurogordato, S., Balkowski, C., Tao, C., and Tran Thanh Van, J., editors, Clustering in the Universe, page 13.
- [82] Wang, J. and White, S. D. M. (2007). Discreteness effects in simulations of hot/warm dark matter. MNRAS, 380(1):93–103.
- [83] Weinberg, S. (2008). Cosmology. Oxford University Press, Oxford, UK.
- [84] Whitbourn, J. R. and Shanks, T. (2014). The local hole revealed by galaxy counts and redshifts. MNRAS, 437(3):2146–2162.
- [85] White, M. (2014). The Zel’dovich approximation. MNRAS, 439:3630–3640.
- [86] White, S. D. M. (1994). Formation and Evolution of Galaxies: Les Houches Lectures. arXiv e-prints, pages astro-ph/9410043.
- [87] Wiltshire, D. L. (2007a). Cosmic clocks, cosmic variance and cosmic averages. New Journal of Physics, 9:377.
- [88] Wiltshire, D. L. (2007b). Exact Solution to the Averaging Problem in Cosmology. Physical Review Letters, 99(25):251101.
- [89] Wiltshire, D. L. (2009). Average observational quantities in the timescape cosmology. Phys. Rev. D, 80(12):123512.
- [90] Wojtak, R., Knebe, A., Watson, W. A., Iliev, I. T., Heß, S., Rapetti, D., Yepes, G., and Gottlöber, S. (2014). Cosmic variance of the local Hubble flow in large-scale cosmological simulations. MNRAS, 438(2):1805–1812.
- [91] York, D. G., Adelman, J., Anderson, John E., J., Anderson, S. F., Annis, J., Bahcall, N. A., Bakken, J. A., Barkhouser, R., Bastian, S., Berman, E., Boroski, W. N., Bracker, S., Briegel, C., Briggs, J. W., Brinkmann, J., Brunner, R., Burles, S., Carey, L., Carr, M. A., Castander, F. J., Chen, B., Colestock, P. L., Connolly, A. J., Crocker, J. H., Csabai, I., Czarapata,

P. C., Davis, J. E., Doi, M., Dombeck, T., Eisenstein, D., Ellman, N., Elms, B. R., Evans, M. L., Fan, X., Federwitz, G. R., Fiscelli, L., Friedman, S., Frieman, J. A., Fukugita, M., Gillespie, B., Gunn, J. E., Gurbani, V. K., de Haas, E., Haldeman, M., Harris, F. H., Hayes, J., Heckman, T. M., Hennessy, G. S., Hindsley, R. B., Holm, S., Holmgren, D. J., Huang, C.-h., Hull, C., Husby, D., Ichikawa, S.-I., Ichikawa, T., Ivezić, Ž., Kent, S., Kim, R. S. J., Kinney, E., Klaene, M., Kleinman, A. N., Kleinman, S., Knapp, G. R., Korienek, J., Kron, R. G., Kunszt, P. Z., Lamb, D. Q., Lee, B., Leger, R. F., Limmongkol, S., Lindenmeyer, C., Long, D. C., Loomis, C., Loveday, J., Lucinio, R., Lupton, R. H., MacKinnon, B., Mannery, E. J., Mantsch, P. M., Margon, B., McGehee, P., McKay, T. A., Meiksin, A., Merelli, A., Monet, D. G., Munn, J. A., Narayanan, V. K., Nash, T., Neilsen, E., Neswold, R., Newberg, H. J., Nichol, R. C., Nicinski, T., Nonino, M., Okada, N., Okamura, S., Ostriker, J. P., Owen, R., Pauls, A. G., Peoples, J., Peterson, R. L., Petravick, D., Pier, J. R., Pope, A., Pordes, R., Prosapio, A., Rechenmacher, R., Quinn, T. R., Richards, G. T., Richmond, M. W., Rivetta, C. H., Rockosi, C. M., Ruthmansdorfer, K., Sandford, D., Schlegel, D. J., Schneider, D. P., Sekiguchi, M., Sergey, G., Shimasaku, K., Siegmund, W. A., Smee, S., Smith, J. A., Snedden, S., Stone, R., Stoughton, C., Strauss, M. A., Stubbs, C., SubbaRao, M., Szalay, A. S., Szapudi, I., Szokoly, G. P., Thakar, A. R., Tremonti, C., Tucker, D. L., Uomoto, A., Vanden Berk, D., Vogeley, M. S., Waddell, P., Wang, S.-i., Watanabe, M., Weinberg, D. H., Yanny, B., Yasuda, N., and SDSS Collaboration (2000). The Sloan Digital Sky Survey: Technical Summary. *AJ*, 120(3):1579–1587.

- [92] Zeldovich, I. B. (1978). The Theory of the Large Scale Structure of the Universe. In Longair, M. S. and Einasto, J., editors, Large Scale Structures in the Universe, volume 79 of IAU Symposium, page 409.
- [93] Zel'dovich, Y. B. (1970). Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations. AAP, 5:84–89.
- [94] Zwicky, F. (1933). Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. Helvetica Physica Acta, 6:110–127.

A függelék

A StePS szimulációs program használata

A.1. A program telepítése és futtatása

A StePS programot C++ nyelven írtam elsősorban GNU/Linux¹ operációs rendszerekre, mivel ma már minden szuperszámítógépen ilyen rendszer fut. A program telepítéséhez először le kell tölteni a StePS programot. Ezt legegyszerűbben parancssorból a git² verziókezelő segítségével tehető meg:

```
$ git clone https://github.com/eltevo/StePS
```

Természetesen böngészőből is letölthető a program az <https://github.com/eltevo/StePS> oldalról. Ahhoz, hogy a programot sikeresen lefordítsuk, meg kell adni a Makefile-ban, hogy a fordításhoz szükséges könyvtárak hol találhatók. Ezt a

```
$ cd StePS/StePS/src
```

```
$ gedit Makefile
```

parancssal tehetjük meg. Itt mindenképpen szükséges megadni az OpenMPI³ könyvtár elérési útvonalát. Opcionális könyvtárak a CUDA és a HDF5. A CUDA segítségével lehet grafikus kártyákon végezni az erőszámítást. Ennek megadásának hiányában csupán CPU klaszteren lesz képes futni a program. A HDF5 könyvtár segítségével HDF5 formátumú file-ok beolvasása és kiírása lesz lehetséges a lefordított programmal. A program néhány funkciója ebben a

¹<https://www.gnu.org/>

²<https://git-scm.com/>

³<https://www.open-mpi.org/>

Makefile-ban, mint fordításkori paraméter állítható. Ezzel a technikával igen optimalizált futtatható állomány hozható létre. A következő paraméterek állíthatók itt:

- `USE_SINGLE_PRECISION`: Ha ez be van kapcsolva, akkor a program 32 bites pontossággal, ha nincs akkor 64 bites pontossággal végzi az erőszámítást a program. A 32 bites erőszámítás GPU-k esetén célszerű, ezzel ~ 32 -szer gyorsabb az erőszámítás az NVIDIA GTX kártyákon, mint 64 biten. NVIDIA Tesla kártyák esetén ez a gyorsulás ~ 2 -szeres.
- `PERIODIC`: Ha ez a paraméter be van kapcsolva, akkor periodikus határfeltétel mellett számol a program.
- `HAVE_HDF5`: Ez a paraméter határozza meg, hogy a futtatható állomány használja a HDF5 könyvtárat, vagy sem.
- `GLASS_MAKING`: Ez az opciót akor kell bekapcsolni, ha három dimenziós gömbi üveg előállítás a cél. Ekkor a program fordított gravitációt fog használni.

Miután a Makefile-ban megadtuk a szükséges könyvtárak helyét és a fordításkori paramétereket, a program egyszerűen a

```
$ make
```

paranccsal fordítható.

A lefordított program, ha CUDA nélkül lett fordítva, akkor a

```
$ export OMP_NUM_THREADS=<N_OMP>
```

```
$ mpirun -n <N_MPI> ./StePS <parameterfile>
```

utasítással indítható, ahol `N_OMP` az OpenMP szálak száma MPI szálanként, és `N_MPI` az MPI szálak száma. Ha grafikus kártyákhoz lett fordítva CUDA-val, akkor a szimuláció indítása a következő paranccsal történik:

```
$ export OMP_NUM_THREADS=<N_GPU>
```

```
$ mpirun -n <N_MPI> ./StePS_CUDA <parameterfile> <N_GPU>
```

, ahol `N_GPU` a grafikus kártyák száma MPI szálanként.

A.2. Bemeneti paraméterek

A szimuláció elindításakor meg kell adni a szimulált Univerzum és a szimuláció paramétereit a programnak. Ezeket egy paraméter fájl tartalmazza, aminek helyét a program indításakor argumentumként meg kell adni. A paraméterfájl egy egyszerű ASCII fájl, aminek minden sora egy paramétert tartalmaz. A program indításához szükséges paraméterek a A.1 és A.2 táblázatban találhatók.

Kulcsszó	Példa érték	Rövid leírás
COSMOLOGY	1	Ezzel a paraméterrel állítható be, hogy kozmológiai, vagy közönséges N-test szimulációt futtatunk.
Omega_lambda	0,6911	Kozmológiai állandóhoz tartozó energiasűrűség ρ_{crit} egységekben, $z = 0$ állapotban.
Omega_dm	0,3089	Sötét anyag energiasűrűsége ρ_{crit} egységekben, $z = 0$ állapotban.
Omega_r	0,0	Sugárzás energiasűrűsége ρ_{crit} egységekben, $z = 0$ állapotban.
H0	67,74	Hubble állandó km/s/Mpc egységekben.
a_start	0,01526	Kezdeti skálafaktor.

A.1. táblázat. A StePS program elindításához szükséges kozmológiai paraméterek

A.3. Ki- és bemeneti formátumok

ASCII

A szimulációs program minden szimuláció esetén egy egyszerű "Logfile.dat" szöveges fájlba menti a szimuláció adott állapotát minden egyes lépésben. Ez a fájl tartalmazza a fizikai időt milliárd évben, az időlépés lépéshosszát, az integrálás során elkövetett becsült hibát, a skálafaktort, a vöröseltolódást, az aktuális Hubble-paramétert, és a lassulási paramétert.

A részecskék koordinátáit, sebességeit, és tömegeit ASCII formátumban írja ki illetve olvassa be, ha az indításhoz használt paraméterfájlban rendre az OUTPUT_FORMAT vagy IC_FORMAT értéke 0-ra van állítva. Ekkor minden sor egy részecske adatait tartalmazza. Adott soron belül 7 számérték található amelyek megadják az adott részecske x , y , és z

Kulcsszó	Példa érték	Rövid leírás
IS_PERIODIC	0	Határfeltétel kiválasztása. 0: StePS szimuláció; 1: Hagyományos periodikus szimuláció. Ha az itt beállított érték nem egyezik a Makefile-ban beállítottal, akkor hibaüzenettel kilép a program.
L_box	2000,0	Szimuláció lineáris mérete Mpc egységekben.
IC_FILE	../IC.hdf5	Kezdeti feltételt tartalmazó fájl elérési útvonala.
IC_FORMAT	2	Kezdeti feltétel formátuma. 0: ASCII; 1: GADGET2; 2: HDF5.
OUT_DIR	../LCDM/	Kimeneti mappa útvonala. Ide kerül kiírásra minden kimeneti file.
OUT_LST	../lst.txt	Kimeneti időpontok listája. Az ebben a file-ban lévő időpontokban írja ki a részecskék adatait a program.
FIRST_T_OUT	0,25	Első kimeneti időpont. Csak akkor van használatban, ha az OUT_LST fájl nem létezik.
H_OUT	0,25	Kimeneti időpontok gyakorisága. Csak akkor van használatban, ha az OUT_LST fájl nem létezik.
OUTPUT_TIME_VARIABLE	1	Megadja az előírt kimeneti időpontok egységeit. 0: fizikai idő Gy-ben; 1: vöröseltolódás
OUTPUT_FORMAT	2	Kimeneti fájlok formátuma. 0: ASCII; 2: HDF5.
REDSHIFT_CONE	0	Vöröseltolódás-kúp kiírása
MIN_REDSHIFT	0,003	A legkisebb kiírt vöröseltolódás, az ennél kisebb z -hez tartozó részecskék a $z = 0$ állapotban lesznek kiírva. Csak REDSHIFT_CONE=1 esetén van használva.
a_max	1,0	Maximális skálafaktor. Eddig fut a szimuláció.
ACC_PARAM	0,0025	Előírt ϵ pontossági paraméter.
h_min	0,00002	Minimális Δt lépéshossz Gy egységekben.
h_max	0,031250	Maximális Δt lépéshossz Gy egységekben.
ParticleRadi	0,10	A legkisebb tömegű részecskéhez tartozó h_{\min} simítási hossz.

A.2. táblázat. A StePS program elindításához szükséges szimulációs paraméterek

koordinátáit Mpc egységekben, a v_x , v_y , és v_z sebességeit km/s egységekben, és a tömegét $10^{11} M_{\odot}$ -ben.

GADGET-2

A *GADGET-2* kozmológiai szimulációs program által használt elsődleges bináris formátum. Csak a kezdeti feltétel formátumaként választható, a *StePS* szimulációs program nem képes ilyen formátumban kiírni az eredményeit. Ennek a formátumnak a használata esetén minden részecskének a tömege azonos lesz.

HDF5

Nagy mennyiségű és komplex adatok kezelésére kifejlesztett bináris fájlformátum a *HDF5*, és ez a részecskék adatainak kimentésére és beolvasására javasolt fájlformátum a programban. A *StePS* által használt *HDF5* fájlstruktúra megtekinthető a *h5dump* paranccsal:

```
$ h5dump -n snapshot_0000.hdf5
HDF5 "snapshot_0000.hdf5" {
FILE_CONTENTS {
  group      /
  group      /Header
  group      /PartType1
  dataset    /PartType1/Coordinates
  dataset    /PartType1/Masses
  dataset    /PartType1/ParticleIDs
  dataset    /PartType1/Velocities
}
}
```

Ahol a */Header* a szimuláció főbb paramétereit, míg */PartType1* a részecskék adatait tartalmazza. Ez a fájlformátum kompatibilis a *GADGET-2* által használt *HDF5* formátummal.

ADATLAP

a doktori értekezés nyilvánosságra hozatalához*

I. A doktori értekezés adatai

A szerző neve: Rácz Gábor

MTMT-azonosító: 10066543

A doktori értekezés címe és alcíme: Kozmológiai modellek vizsgálata numerikus szimulációkkal

DOI-azonosító: 10.15476/ELTE.2020.012

A doktori iskola neve: ELTE TTK, Fizika Doktori Iskola

A doktori iskolán belüli doktori program neve: Részecskefizika és csillagászat program

A témavezető neve és tudományos fokozata: Dr. Dobos László (PhD)

A témavezető munkahelye: ELTE TTK, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

II. Nyilatkozatok

1. A doktori értekezés szerzőjeként

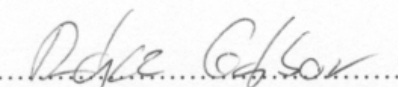
- a) hozzájárulok, hogy a doktori fokozat megszerzését követően a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban. Felhatalmazom a Természettudományi kar Dékáni Hivatal Doktori, Habilitációs és Nemzetközi Ügyek Csoportjának ügyintézőjét, hogy az értekezést és a téziseket feltöltse az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba, és ennek során kitöltse a feltöltéshez szükséges nyilatkozatokat.
- b) kérem, hogy a mellékelt kérelemben részletezett szabadalmi, illetőleg oltalmi bejelentés közzétételéig a doktori értekezést ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;
- c) kérem, hogy a nemzetbiztonsági okból minősített adatot tartalmazó doktori értekezést a minősítés (dátum)-ig tartó időtartama alatt ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;
- d) kérem, hogy a mű kiadására vonatkozó mellékelt kiadó szerződésre tekintettel a doktori értekezést a könyv megjelenéséig ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban, és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban csak a könyv bibliográfiai adatait tegyék közzé. Ha a könyv a fokozatszerzést követően egy évig nem jelenik meg, hozzájárulok, hogy a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban.

2. A doktori értekezés szerzőjeként kijelentem, hogy

- a) az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba feltöltendő doktori értekezés és a tézisek saját eredeti, önálló szellemi munkám és legjobb tudomásom szerint nem sértem vele senki szerzői jogait;
- b) a doktori értekezés és a tézisek nyomtatott változatai és az elektronikus adathordozón benyújtott tartalmak (szöveg és ábrák) mindenben megegyeznek.

3. A doktori értekezés szerzőjeként hozzájárulok a doktori értekezés és a tézisek szövegének plágiumkereső adatbázisba helyezéséhez és plágiumellenőrző vizsgálatok lefuttatásához.

Kelt: 2020.02.10

..........
a doktori értekezés szerzőjének aláírása

*ELTE SZMSZ SZMR 12. sz. melléklet